3.7 Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre quelconque. Il s'agit de montrer qu'il est impossible que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n - a| < \frac{1}{2}$.

Soit $n \geqslant n_0$. On obtient alors :

$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - a + a - u_n| \leqslant |u_{n+1} - a| + |a - u_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$

Mais $|u_{n+1} - u_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}| = |2\cdot(-1)^{n+1}| = 2\,.$

On aboutit ainsi à la contradiction $2 = |u_{n+1} - u_n| < 1\,.$