3 Limites

On dit que L est la **limite** de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x avec $0 < |x - a| < \delta$ on ait $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$.

Cette définition signifie que la différence $f(x) - \mathrm{L}$ peut être aussi petite que l'on veut, pour autant que la différence $x - a$ soit suffisamment petite. En d'autres termes, $f(x)$ est infiniment proche de L, pour autant que x soit suffisamment proche de a.

Proposition *Si une fonction possède une limite, alors elle est unique.*

Preuve Montrons que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}_1$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}_2$, alors $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_2$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe δ_1 tel que pour tout x avec $|x - a| < \delta_1$ on ait $|f(x) - \mathrm{L}_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Il existe δ_2 tel que pour tout x avec $|x - a| < \delta_2$ on ait $|f(x) - \mathrm{L}_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors pour tout x avec $|x - a| < \delta$ on a $|\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2| = |\mathrm{L}_1 - f(x) + f(x) - \mathrm{L}_2| \leqslant |\mathrm{L}_1 - f(x)| + |f(x) - \mathrm{L}_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Puisque la différence $|\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2|$ peut devenir aussi petite que l'on veut, elle est nulle. C'est pourquoi $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_2$.

Proposition *Soient f une fonction et $a \in \mathrm{D}_f$. Alors f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Preuve

1) Supposons f continue en a. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x avec $|x - a| < \delta$ on ait $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
En d'autres termes, $f(a)$ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.
2) Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x avec $0 < |x - a| < \delta$ l'inégalité $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ soit vérifiée. Si $|x - a| = 0$, alors $x = a$ et $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. On a ainsi obtenu que pour tout x avec $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En d'autres termes, f est continue en a.

3.1 Calculer les limites suivantes :

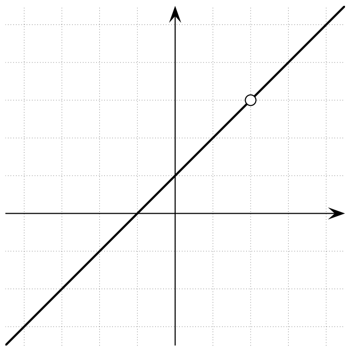
1) $\lim\limits_{x \to 2} 5\,x$ 2) $\lim\limits_{x \to 2} 2\,x + 3$ 3) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4\,x + 1$

4) $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{25 - x^2}$ 5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ 6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 2}{x + 2}$

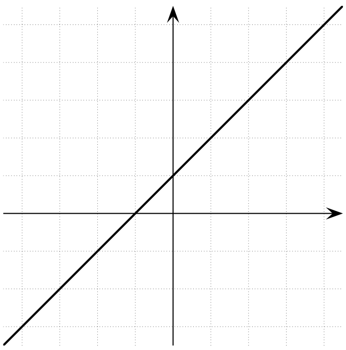
Proposition *Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mathrm{L}$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{L}$.*

Preuve Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mathrm{L}$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x avec $0 < |x-a| < \delta$ on ait $|g(x)-\mathrm{L}| < \varepsilon$. Soit x avec $0 < |x-a| < \delta$. Comme $x \neq a$, on a $f(x) = g(x)$, de sorte que $|f(x) - \mathrm{L}| = |g(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

Exemple La fonction $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ n'est pas définie en 2, si bien que l'on ne peut déterminer directement la limite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$.
En revanche, si $x \neq 2$, on a $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)\,(x+1)}{x-2} = x+1$.
En posant $g(x) = x+1$, la proposition précédente permet de conclure : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} x+1 = 2+1 = 3$.



Graphe de f



Graphe de g

On dit que la fonction g est la **prolongée par continuité** de la fonction f. On appelle le point $(2\,;3)$ un **trou**.

3.2 Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

3) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5\,x+6}$

4) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2+3\,x+2}{x^2+4\,x+3}$

5) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

6) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3\,x+2}{x^2-6\,x+8}$

7) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}$

8) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^6-1}{x^4-1}$

9) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3-7\,x-6}{x^3+x^2-2\,x}$

10) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2\,x^2+x-1}{x^3+1}$

11) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{3\,x^3-18\,x^2+36\,x-24}{x^3-3\,x^2+4}$

12) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3\,x+2}{x^2-2\,x+1}$

3.3 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2\,x-1}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{4\,x+5}}{x-1}$

On dit que la limite de la fonction f est infinie quand x tend vers a si pour tout $\mathrm{M}\in\mathbb{R}_+$ il existe $\delta>0$ tel que pour tout x avec $0<|x-a|<\delta$ on ait $|f(x)|>\mathrm{M}$. On note $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Cette définition signifie que, abstraction faite de son signe, la fonction f peut dépasser des valeurs aussi grandes que l'on veut, pour autant que l'on se situe dans un voisinage suffisamment proche du point a.

Proposition *Soient f et g deux fonctions avec $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq0$ et $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.*

Preuve Soit $\mathrm{M}\in\mathbb{R}_+$ un nombre arbitrairement grand.
Soit $\mathrm{L}=\lim\limits_{x\to a}f(x)$. L'énoncé de la proposition stipule que $\mathrm{L}\neq0$.
Posons $\varepsilon=\frac{1}{2}\,|\mathrm{L}|>0$. Puisque $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\mathrm{L}$, il existe $\delta_1>0$ tel que pour tout x avec $|x-a|<\delta_1$ on ait $|f(x)-\mathrm{L}|<\frac{1}{2}\,|\mathrm{L}|$. Soit $x\in\mathrm{D}_f$ avec $|x-a|<\delta_1$. On a $|\mathrm{L}|=|\mathrm{L}-f(x)+f(x)|\leqslant|\mathrm{L}-f(x)|+|f(x)|<\frac{1}{2}\,|\mathrm{L}|+|f(x)|$. L'inégalité $|\mathrm{L}|<\frac{1}{2}\,|\mathrm{L}|+|f(x)|$ implique $|f(x)|>\frac{1}{2}\,|\mathrm{L}|$ pour tout $x\in\mathrm{D}_f$ avec $|x-a|<\delta_1$.
Posons $\varepsilon=\frac{|\mathrm{L}|}{2\,\mathrm{M}}$. Comme $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, il existe $\delta_2>0$ tel que pour tout x avec $|x-a|<\delta_2$ on ait $|g(x)-0|=|g(x)|<\frac{|\mathrm{L}|}{2\,\mathrm{M}}$ ou encore $\frac{1}{|g(x)|}>\frac{2\,\mathrm{M}}{|\mathrm{L}|}$.
Posons $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$. Alors pour tout x avec $|x-a|<\delta$, on obtient :
$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=|f(x)|\cdot\frac{1}{|g(x)|}>\frac{1}{2}\,|\mathrm{L}|\cdot\frac{2\,\mathrm{M}}{|\mathrm{L}|}=\mathrm{M}$.

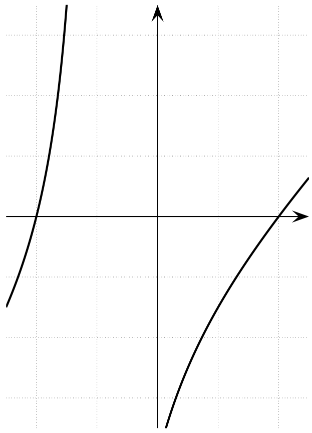
Remarque : lorsqu'on effectue de tels calculs de limites, on rencontre des calculs abusifs que l'on signale par l'usage de guillemets.
On écrira ainsi $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3\,x-1}{x-2}=$ « $\dfrac{5}{0}$ » $=\infty$.

3.4 On donne les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2\,x + 1}$.

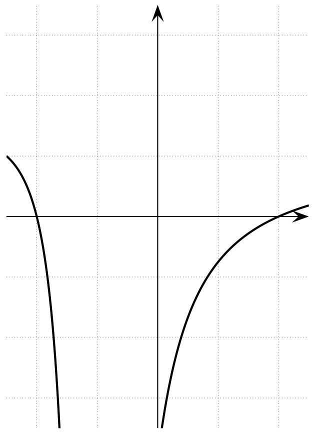
1) Justifier que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$ et que $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = \infty$.

2) Identifier, parmi les graphes ci-dessous, lequel correspond à chacune des fonctions f et g.

(a)



(b)



Remarque : l'étude du signe permet de distinguer de tels cas.

C'est pour cela que l'on introduit les notions de limite à gauche et de limite à droite que l'on note respectivement $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

On distingue ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1} = -\infty$.

3.5 Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer les limites à gauche et à droite des valeurs interdites.

1) $f(x) = \dfrac{12 - 2\,x}{3 - x}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3\,x + 2}{x^2 + 4\,x + 4}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6\,x - 7}{-x^3 + x^2 - x + 1}$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 24} - \sqrt{x + 15}}{x - 1}$

6) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x + 6}}{x^2 + 5\,x + 6}$

3.6 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{x}{x^2 - 2\,x + 1}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x}{x^2 - 2\,x + 1}$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x^2 - 2\,x}{|x|}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2 - 2\,x}{|x|}$

3.7 Calculer les limites suivantes en distinguant, au besoin, les limites à gauche et à droite.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2\,x+1}{x-1}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^3-3\,x+2}{x^2-6\,x+5}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3\,x+2}{x^2-4\,x+4}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3\,x+2}{x^2-4\,x+4}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3\,x+2}{(x-1)^2}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left|\frac{x^2-1}{x^2-2\,x+1}\right|$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4-5\,x^3+6\,x^2+4\,x-8}{x^3-4\,x^2+4\,x}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2-5\,x}{x^4-5\,x^3}$

9) $\displaystyle\lim_{x\to 11} \frac{3-\sqrt{x-2}}{x-11}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

11) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

12) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^3-3\,x-2}{\sqrt{x-2}}$

On définit la **limite à l'infini** d'une fonction f par $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} f(\tfrac{1}{x})$.
Plus précisément, on pose $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(\tfrac{1}{x})$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(\tfrac{1}{x})$.

3.8 Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -2\,x^2+x+1$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2\,x^2+x+1$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x^3+x^2-x+1$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x^3+x^2-x+1$

4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{3\,x^2-4}$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3\,x^2-4}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{3\,x+1}$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3\,x+1}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+2\,x+7}$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+2\,x+7}$

3.9

1) Soit $f(x) = \lambda_n\,x^n+\lambda_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+\lambda_1\,x+\lambda_0$ une fonction polynomiale. En mettant x^n en évidence, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \lambda_n\,x^n$.

2) En déduire que la limite à l'infini de toute fonction rationnelle vaut :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lambda_n\,x^n+\lambda_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+\lambda_1\,x+\lambda_0}{\mu_m\,x^m+\mu_{m-1}\,x^{m-1}+\ldots+\mu_1\,x+\mu_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda_n\,x^n}{\mu_m\,x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n<m \\ \frac{\lambda_n}{\mu_m} & \text{si } n=m \\ \infty & \text{si } n>m \end{cases}$$

3.10 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x^2-3\,x}{3\,x^2-5\,x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\,x^2-x+1}{x^3+x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4\,x+3}{2\,x^2+5}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-5\,x+6}{2\,x^2-6\,x}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-3\,x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x}{x-1}$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,x}{x^2+3}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,x^3-7\,x+1}{3\,x^3-2\,x^2}$

3.11 Calculer les limites suivantes en distinguant, au besoin, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}$.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6\,x^4-3\,x^2+2}{x^3-27}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8\,x^5-3\,x^2+2\,x-3}{32\,x^5+1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\,x-2}{9\,x+7}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6\,x^2+2\,x+1}{6\,x^2-3\,x+4}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-2}{4\,x^3-1}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\,x^3}{1-x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3\,x+4)\,(x-1)}{(2\,x+7)\,(1-5\,x)}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^7\,(2\,x+3)^4}{(2\,x+1)^3\,(x-98)^8}$

3.12 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,x-5+\dfrac{10}{x+2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{3\,x}-\dfrac{16}{3\,(x+3)}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\,x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4\,x^2}{2\,x+1}+3-2\,x$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} x+3-\dfrac{x^2+4\,x}{x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\,x^2-1}{x+1}-\dfrac{6\,x^2+1}{2\,x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} x-5-\dfrac{2\,x^2-x}{2\,x+1}$

3.13 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4\,x+3}}{x+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4\,x+3}}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5\,x+3\,\sqrt{x^2+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} 5\,x+3\,\sqrt{x^2+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2\,x} - \sqrt{x^2 + 4}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2\,x} - \sqrt{x^2 + 4}$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 1}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Réponses

3.1

1) 10 $\quad$ 2) 7 $\quad$ 3) -3

4) 3 $\quad$ 5) $-\frac{3}{5}$ $\quad$ 6) $\frac{1}{5}$

3.2

1) $\frac{1}{7}$ $\quad$ 2) $\frac{9}{2}$ $\quad$ 3) -4 $\quad$ 4) $\frac{1}{2}$

5) $\frac{1}{4}$ $\quad$ 6) $-\frac{1}{2}$ $\quad$ 7) $-\frac{1}{2}$ $\quad$ 8) $\frac{3}{2}$

9) $\frac{5}{6}$ $\quad$ 10) -1 $\quad$ 11) 0 $\quad$ 12) 3

3.3

1) $\frac{1}{4}$ $\quad$ 2) $\frac{1}{2}$ $\quad$ 3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ 4) 3

5) 2 $\quad$ 6) $\frac{1}{4}$ $\quad$ 7) $-\frac{1}{6}$ $\quad$ 8) $-\frac{1}{2}$

3.4

2) f : (a) $\qquad$ g : (b)

3.5

1) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$

2) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

3) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

4) $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -4$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -4$

5) $\mathrm{D}_f = [-15\,; 1[\cup]1\,; +\infty[$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$

6) $\mathrm{D}_f = [-6\,; -3[\cup]-3\,; -2[\cup]-2\,; +\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = \frac{5}{4}$

3.6

1) 1 $\quad$ 1 $\quad$ 2) $-\infty$ $\quad$ $+\infty$

3) $+\infty$ $\quad$ $+\infty$ $\quad$ 4) 2 $\quad$ -2

3.7

1) 0 $\quad$ 2) g. : $-\infty$ $\quad$ d. : $+\infty$ $\quad$ 3) g. : $-\infty$ $\quad$ d. : $+\infty$

4) 0 $\quad$ 5) 3 $\quad$ 6) $+\infty$

7) g. : $+\infty$ $\quad$ d. : $-\infty$ $\quad$ 8) $+\infty$ $\quad$ 9) $-\frac{1}{6}$

10) g. : $-\infty$ $\quad$ d. : $+\infty$ $\quad$ 11) 6 $\quad$ 12) 0

3.8	1) 0	0	2) $-\infty$	$-\infty$
	3) $+\infty$	$-\infty$	4) $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	5) $-\infty$	$+\infty$	6) $-\infty$	-1

3.10	1) $\frac{2}{3}$	2) 0	3) $\frac{1}{2}$	4) $\frac{1}{2}$
	5) 0	6) 2	7) 0	8) $\frac{2}{3}$
3.11	1) $-\infty \mid +\infty$	2) $\frac{1}{4}$	3) $\frac{1}{3}$	4) 1
	5) 0	6) $+\infty \mid -\infty$	7) $-\frac{3}{10}$	8) 2
3.12	1) $-\infty$	2) $+\infty$	3) 1	4) 0
	5) 2	6) 0	7) $-\frac{9}{2}$	8) -4

3.13	1) $+\infty$	$\frac{1}{2}$	2) -1	1
	3) $-\infty$	$+\infty$	4) $-\infty$	0
	5) $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6) -1	1
	7) -2	0	8) $\frac{1}{2}$	