3.2 1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}=\dfrac{4-4}{4^2-4-12}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-x-12}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x+3)\,(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{4+3}=\dfrac{1}{7}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\dfrac{3^3-27}{3^2-9}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\,(x^2+3\,x+9)}{(x-3)\,(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3\,x+9}{x+3}=\dfrac{3^2+3\cdot 3+9}{3+3}$

$=\dfrac{27}{6}=\dfrac{9}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5\,x+6}=\dfrac{2^2-4}{2^2-5\cdot 2+6}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5\,x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\,(x+2)}{(x-2)\,(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{2+2}{2-3}=-4$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3\,x+2}{x^2+4\,x+3}=\dfrac{(-1)^2+3\cdot(-1)+2}{(-1)^2+4\cdot(-1)+3}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3\,x+2}{x^2+4\,x+3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\,(x+2)}{(x+1)\,(x+3}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{-1+2}{-1+3}=\dfrac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\dfrac{2-2}{2^2-4}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\,(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3\,x+2}{x^2-6\,x+8}=\dfrac{2^2-3\cdot 2+2}{2^2-6\cdot 2+8}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3\,x+2}{x^2-6\,x+8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x-2)\,(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-4}=\dfrac{2-1}{2-4}=-\dfrac{1}{2}$

7) $\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}=\dfrac{2}{(1-x)\,(1+x)}-\dfrac{3}{(1-x)\,(1+x+x^2)}=$

$\dfrac{2\,(1+x+x^2)-3\,(1+x)}{(1-x)\,(1+x)\,(1+x+x^2)}=\dfrac{2\,x^2-x-1}{(1-x)\,(1+x)\,(1+x+x^2)}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\,x^2-x-1}{(1-x)\,(1+x)\,(1+x+x^2)}=$

$\dfrac{2\cdot 1^2-1-1}{(1-1)\,(1+1)\,(1+1+1^2)}=\dfrac{0}{0}$ indéterminé

Pour factoriser $2\,x^2-x-1$, recherchons ses zéros :

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=9=3^2$

$x_1=\frac{-(-1)-3}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}\qquad x_2=\frac{-(-1)+3}{2\cdot 2}=1$

$2\,x^2 - x - 1 = 2\,(x + \frac{1}{2})\,(x-1) = (2\,x+1)\,(x-1)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{2\,x^2 - x - 1}{(1-x)\,(1+x)\,(1+x+x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(2\,x+1)\,(x-1)}{\underbrace{(1-x)}_{-(x-1)}\,(1+x)\,(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1} -\frac{2\,x+1}{(1+x)\,(1+x+x^2)} =$$

$$-\frac{2\cdot 1+1}{(1+1)\,(1+1+1^2)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

8) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^4-1} = \frac{1^6-1}{1^4-1} = \frac{0}{0}$ indéterminé

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)\,(x^4+x^2+1)}{(x^2-1)\,(x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$$

$$= \frac{1^4+1^2+1}{1^2+1} = \frac{3}{2}$$

9) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-7\,x-6}{x^3+x^2-2\,x} = \frac{(-2)^3-7\cdot(-2)-6}{(-2)^3+(-2)^2-2\cdot(-2)} = \frac{0}{0}$ indéterminé

Factorisons $x^3 - 7\,x - 6$ à l'aide du schéma de Horner, attendu que $x = -2$ est un zéro de ce polyôme :

1	0	−7	−6
	−2	4	6
1	−2	−3 ‖	0

Ainsi $x^3 - 7\,x - 6 = (x+2)\,(x^2 - 2\,x - 3) = (x+2)\,(x+1)\,(x-3)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-7\,x-6}{x^3+x^2-2\,x} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\,(x+1)\,(x-3)}{x\,(x+2)\,(x-1)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)\,(x-3)}{x\,(x-1)}$$

$$= \frac{(-2+1)\,(-2-3)}{-2\cdot(-2-1)} = \frac{5}{6}$$

10) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2\,x^2+x-1}{x^3+1} = \frac{2\cdot(-1)^2+(-1)-1}{(-1)^3+1} = \frac{0}{0}$ indéterminé

Recherchons les zéros du polynôme $2\,x^2 + x - 1$ pour le factoriser :

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9 = 3^2$

$x_1 = \frac{-1-3}{2\cdot 2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$

Donc $2\,x^2 + x - 1 = 2\,(x+1)\,(x - \frac{1}{2}) = (x+1)\,(2\,x-1)$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2\,x^2+x-1}{x^3+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\,(2\,x-1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2\,x-1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{2\cdot(-1)-1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{-3}{3} = -1$$

11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3\,x^3-18\,x^2+36\,x-24}{x^3-3\,x^2+4} = \dfrac{3\cdot 2^3-18\cdot 2^2+36\cdot 2-24}{2^3-3\cdot 2^2+4} = \dfrac{0}{0}$ indéterminé

$3\,x^3-18\,x^2+36\,x-24 = 3\,(x^3-6\,x^2+12\,x-8) = 3\,(x-2)^3$

Comme l'on sait que $x=2$ est un zéro de $x^3-3\,x^2+4$, recourons au schéma de Horner :

1	−3	0	4
	2	−2	−4
1	−1	−2	0

Par conséquent $x^3-3\,x^2+4 = (x-2)\,\underbrace{(x^2-x-2)}_{(x-2)\,(x+1)} = (x-2)^2\,(x+1)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3\,x^3-18\,x^2+36\,x-24}{x^3-3\,x^2+4} = \lim_{x\to 2} \frac{3\,(x-2)^3}{(x-2)^2\,(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{3\,(x-2)}{x+1}$$
$$= \frac{3\cdot(2-2)}{2+1} = 0$$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3\,x+2}{x^2-2\,x+1} = \dfrac{1^3-3\cdot 1+2}{1^2-2\cdot 1+1} = \dfrac{0}{0}$ indéterminé

Pour factoriser $x^3-3\,x+2$, on utilise le schéma de Horner, car l'on sait que $x=1$ est un zéro de ce polynôme :

1	0	−3	2
	1	1	−2
1	1	−2	0

Par suite $x^3-3\,x+2 = (x-1)\,\underbrace{(x^2+x-2)}_{(x-1)\,(x+2)} = (x-1)^2\,(x+2)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3\,x+2}{x^2-2\,x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2\,(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} x+2 = 1+2 = 3$$