3 Logarithmes

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. Soit x un nombre réel strictement positif. On appelle **logarithme en base a de x** le nombre y, que l'on note $\log_a(x)$, tel que $a^y = x$.

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x$$

Remarque : $\log_a(x)$ n'est défini que si $x > 0$.

Logarithmes particuliers

Le logarithme en base 10, appelé **logarithme décimal**, se note $\log$.

Le logarithme en base $e \approx 2{,}718\,28$, appelé **logarithme naturel**, se note $\ln$.

3.1 Calculer sans utiliser la machine :

1) $\log_2(8)$	2) $\log_3(1)$	3) $\log_2(1024)$	4) $\log_2(1)$
5) $\log_2(512)$	6) $\log_3\left(\sqrt[5]{3^2}\right)$	7) $\log_3(3)$	8) $\log_2\left(\sqrt{2}\right)$
9) $\log_4\left(\sqrt[5]{64}\right)$	10) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right)$	11) $\log_3\left(\sqrt[4]{27}\right)$	12) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$
13) $\log_3(27)$	14) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$	15) $\log_5(0{,}04)$	16) $\log_{\frac{1}{8}}(64)$
17) $\log_{27}(3)$	18) $\log(100)$	19) $\log_4\left(\sqrt{2}\right)$	20) $\log_{49}\left(\sqrt[3]{7}\right)$
21) $\log_9\left(\sqrt[4]{81}\right)$	22) $\log_{0,25}\left(\sqrt{8}\right)$	23) $\ln(e)$	24) $\log_{0,1}(0{,}000\,01)$
25) $\log_a(1)$	26) $\log_a(a)$	27) $\log_a(a^3)$	28) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right)$
29) $\log_a\left(\sqrt{a}\right)$	30) $\log_a\left(\sqrt[3]{a^5}\right)$	31) $\log_a\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$	32) $\log_a\left(a^{-2}\cdot\sqrt[3]{a}\right)$

3.2 Résoudre les équations :

1) $\log_2(x) = 4$	2) $\log_3(x) = 5$	3) $\log_4(x) = 3$
4) $\log_x(256) = 4$	5) $\log_x(125) = 3$	6) $\log_x(1000) = 3$

3.3 Démontrer les propriétés des logarithmes :

1) $\log_a(x\,y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2) $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
3) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
4) $\log_a(x^p) = p\,\log_a(x)$

Indication : poser $\alpha = \log_a(x)$ et $\beta = \log_a(y)$; par définition $x = a^\alpha$ et $y = a^\beta$.

3.4 Calculer sans machine, sachant que $\log_2(3) \approx 1{,}58$ et $\log_2(5) \approx 2{,}32$.

1) $\log_2(12)$ 2) $\log_2\big(\sqrt{5}\big)$ 3) $\log_2(45)$ 4) $\log_2(60)$

5) $\log_2(0{,}3)$ 6) $\log_2\big(\frac{3}{5}\big)$ 7) $\log_2(1000)$ 8) $\log_2\big(\frac{25}{6}\big)$

3.5 Résoudre les équations :

1) $\log_a(x) = \log_a(16) + 2\,\log_a(3) - 2\,\log_a(2) - \frac{1}{2}\,\log_a(9)$
2) $\log_a(x) = 4\,\log_a(5) + \log_a(\frac{1}{5}) - 3\,\log_a(3) + \frac{1}{3}\,\log_a(27)$

3.6 Résoudre les équations :

1) $\log(x+2) - \log(3) = \log(2\,x-1) + \log(7)$
2) $\log(x+2) + \log(x-1) = \log(18)$
3) $\log(2\,x-3) + \log(3\,x+10) = 4\,\log(2)$
4) $\log_2(x^2-4) = 2\,\log_2(x+3)$
5) $\log_3(35-x^3) = 3\,\log_3(5-x)$
6) $\log_2(x) = \frac{1}{2} + \log_4(4\,x+15)$
7) $\log_9(x) = \frac{1}{8}\,\log_3(x^2+2)$
8) $\log(x^2-7) = 2\,\log(x+3)$
9) $\log(20) + \log(x^2-9) - \log(x+3) = 1 + \log(2\,x+6)$
10) $\log_x(7^3) - \log_7(x) = 2$

3.7 Soient a et b deux nombres strictement positifs et différents de 1.
Démontrer la formule du **changement de base** : $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Indication : poser $\alpha = \log_a(x)$ et calculer $\log_b(a^\alpha)$.

La formule du changement de base permet d'estimer $\log_a(x)$ quels que soient a et x à l'aide de la machine à calculer qui dispose des fonctions logarithme décimal et logarithme naturel.

3.8 Résoudre les équations (précision au centième).

1) $2^x = 100$ 2) $10^x = 5$

3) $12^x = 149$ 4) $10^{3\,x} = 14{,}87$

5) $10^x = 43{,}215$ 6) $3^x = 5$

7) $145^x = 3451$ 8) $0{,}421^x = 73{,}55$

3.9 Résoudre les équations (précision au centième).

1) $2^{2\,x} - 5\cdot 2^x + 6 = 0$ 2) $9^x - 2\cdot 3^x = 15$

3) $e^{3\,x} - 5\,e^x + 4\,e^{-x} = 0$ 4) $e^{-x} - 5\,e^x + 4\,e^{3\,x} = 0$

5) $e^x - e^{-x} = 8$ 6) $e^x - (1+e) + e^{-x+1} = 0$

7) $e^{6\,x} - 19\,e^{3\,x} - 216 = 0$ 8) $4\,e^{-3\,x} - 5\,e^{-x} + e^x = 0$

Problèmes

3.10 Un circuit électrique simple comprend une résistance et une inductance. L'intensité I du courant au temps t est donnée par la formule $\mathrm{I} = 20\, e^{\frac{-\mathrm{R}t}{\mathrm{L}}}$, où R est la résistance et L l'inductance.
Résoudre cette équation par rapport à t.

3.11 La relation d'Ehrenberg

$$\ln(m) = \ln(2{,}4) + 1,84\, h$$

est une formule empirique liant la taille (en mètres) à la masse moyenne (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

1) Exprimer m par une fonction de h ne faisant pas intervenir ln.
2) Évaluer la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1,5 m.

3.12 La masse m (en kilogrammes) d'une éléphante d'Afrique à l'âge t (en années) peut être donnée approximativement par $m = 2600\,(1 - 0{,}51\, e^{-0{,}075t})^3$.

1) Donner approximativement sa masse à la naissance.
2) Évaluer l'âge d'une éléphante d'Afrique ayant une masse de 1800 kg.
3) Quel est le poids maximum d'une éléphante d'Afrique ?

3.13 Selon certaines estimations, la population mondiale était de 3 milliards d'habitants en 1960, de 3,65 milliards en 1970 et de 4,45 milliards en 1980.

1) Vérifier que la fonction donnée par $\mathrm{P}(t) = 3 \cdot 2{,}5^{0{,}0216\, t}$, où $\mathrm{P}(t)$ est la population en milliards d'habitants t années après 1960, satisfait ces estimations.
2) À l'aide de cette fonction, prédire la population mondiale en l'an 2000 et 2500.
3) La surface de la terre ferme de la planète est d'environ 147,2 millions de km^2. Calculer la surface dont disposerait chaque personne en 2500 si le modèle s'avérait correct.

3.14 Une population de volatiles, dans une région donnée, chute de 10 % chaque année.

1) Vérifier que dans 3 ans, la population aura chuté à 72,9 % de sa valeur actuelle.
2) Quelle sera la situation dans 7 ans ?
3) Après combien d'années la population aura-t-elle chuté à 30 % de sa valeur actuelle ?

3.15 Un capital C est placé à la banque. Chaque année, il augmente, grâce aux intérêts, de 5 % de sa valeur.

1) Quelle sera sa valeur après t années ?
2) Après combien d'années aura-t-il doublé ?

3.16 Une forêt s'étend exponentiellement. Elle occupe aujourd'hui 72 342 m^3. Il y a 12 ans, elle occupait 48 228 m^3.

1) Quel volume occupait-elle il y a 5 ans ?
2) Quel volume occupera-t-elle dans 7 ans ?

3.17 **Datation au carbone** 14 (^{14}C)

On admet que la concentration du ^{14}C (radioactif) dans l'atmosphère a toujours été constante au cours du temps. Les organismes vivants ingèrent durant toute leur existence du carbone et en particulier du ^{14}C. Ainsi, durant la vie, l'absorption de ^{14}C compense exactement la partie de ^{14}C qui s'est désintégrée. Dès la mort, la quantité de ^{14}C commence à décroître, diminuant de moitié toutes les 5568 années (demi-vie du ^{14}C).

Estimer la date probable des peintures des grottes de Lascaux, sachant que pour un morceau de charbon qu'on y a retrouvé, on comptait 0,97 désintégrations par minute et par gramme en 1950, alors que, pour du bois vivant, on compte 6,68 désintégrations par minute et par gramme.

3.18 L'isotope d'hydrogène ^3H (demi-vie 12,3 années) est produit dans l'atmosphère par les rayons cosmiques et amené sur la terre par les pluies. Les matériaux non organiques ont ainsi un taux constant de tritium. Dès qu'ils sont soustraits à l'action des pluies, leur taux diminue par désintégration.

On mesure la quantité de cet isotope dans les parois d'une maison et on trouve qu'elle atteint 10 % de celle contenue dans une maison récemment construite. Quel est l'âge de cette maison ?

Réponses

3.1

1) 3	2) 0	3) 10	4) 0
5) 9	6) $\frac{2}{5}$	7) 1	8) $\frac{1}{2}$
9) $\frac{3}{5}$	10) -5	11) $\frac{3}{4}$	12) $-\frac{2}{3}$
13) 3	14) -4	15) -2	16) -2
17) $\frac{1}{3}$	18) 2	19) $\frac{1}{4}$	20) $\frac{1}{6}$
21) $\frac{1}{2}$	22) $-\frac{3}{4}$	23) 1	24) 5

	25) 0	26) 1	27) 3	28) -1
	29) $\frac{1}{2}$	30) $\frac{5}{3}$	31) $-\frac{1}{2}$	32) $-\frac{5}{3}$
3.2	1) 16	2) 243	3) 64	
	4) 4	5) 5	6) 10	
3.4	1) $3{,}58$	2) $1{,}16$	3) $5{,}48$	4) $5{,}9$
	5) $-1{,}74$	6) $-0{,}74$	7) $9{,}96$	8) $2{,}06$
3.5	1) $S = \{12\}$	2) $S = \{\frac{125}{9}\}$		
3.6	1) $S = \{\frac{23}{41}\}$	2) $S = \{4\}$	3) $S = \{2\}$	4) $S = \{-\frac{13}{6}\}$
	5) $S = \{2\,;3\}$	6) $S = \{4+\sqrt{46}\}$	7) $S = \{\sqrt{2}\}$	8) $S = \{-\frac{8}{3}\}$
	9) $S = \varnothing$	10) $S = \{\frac{1}{343}\,;7\}$		
3.8	1) $S = \{6{,}64\}$	2) $S = \{0{,}7\}$	3) $S = \{2{,}01\}$	4) $S = \{0{,}39\}$
	5) $S = \{1{,}64\}$	6) $S = \{1, 46\}$	7) $S = \{1{,}64\}$	8) $S = \{-4{,}97\}$
3.9	1) $S = \{1\,;1{,}58\}$	2) $S = \{1{,}46\}$	3) $S = \{0\,;0{,}69\}$	4) $S = \{-0{,}69\,;0\}$
	5) $S = \{2{,}09\}$	6) $S = \{0\,;1\}$	7) $S = \{1{,}1\}$	8) $S = \{0\,;0{,}69\}$
3.11	1) $m = 2{,}4\,e^{1{,}84\,h}$		2) 38 kg	
3.12	1) 306 kg	2) un peu moins de 20 ans	3) 2600 kg	
3.13	2) 6,62 milliards en 2000 131 429 milliards en 2500		3) 1,12 m^2	
3.14	2) 47,83 % de sa valeur actuelle		3) 11,43 années	
3.15	1) $1{,}05^t \cdot C$		2) 14,21 ans	
3.16	1) 61 097 m^3		2) 91 645 m^3	

3.17 environ 13 550 av. J.-C.

3.18 40,86 ans