3.6 La fonction $\log_a(x)$ n'est définie que si $x > 0$, car $a^y > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

1) $\log(x+2)$ est défini si $x+2 > 0$, c'est-à-dire si $x > -2$.
$\log(2\,x-1)$ est définie si $2\,x-1 > 0$, c'est-à-dire si $x > \frac{1}{2}$.
Par conséquent $\mathrm{D} =]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

$\log(x+2) - \log(3) = \log(2\,x-1) + \log(7)$
$\log(\frac{x+2}{3}) = \log\big((2\,x-1)\cdot 7\big)$
$\frac{x+2}{3} = (2\,x-1)\cdot 7$
$x+2 = (2\,x-1)\cdot 21$
$x+2 = 42\,x - 21$
$-41\,x = -23$
$x = \frac{23}{41} \in \mathrm{D}$
$\mathrm{S} = \{\frac{23}{41}\}$

2) $\log(x+2)$ est défini si $x+2 > 0$, c'est-à-dire si $x > -2$.
$\log(x-1)$ est défini si $x-1 > 0$, c'est-à-dire si $x > 1$.
C'est pourquoi $\mathrm{D} =]1\,;+\infty[$.

$\log(x+2) + \log(x-1) = \log(18)$
$\log\big((x+2)\,(x-1)\big) = \log(18)$
$(x+2)\,(x-1) = 18$
$x^2 + x - 2 = 18$
$x^2 + x - 20 = 0$
$(x+5)\,(x-4) = 0$
$x = -5 \notin \mathrm{D}$ ou $x = 4 \in \mathrm{D}$
$\mathrm{S} = \{4\}$

3) $\log(2\,x-3)$ est défini si $2\,x-3 > 0$, c'est-à-dire si $x > \frac{3}{2}$.
$\log(3\,x+10)$ est défini si $3\,x+10 > 0$, c'est-à-dire si $x > -\frac{10}{3}$.
On obtient $\mathrm{D} =]\frac{3}{2}\,;+\infty[$.

$\log(2\,x-3) + \log(3\,x+10) = 4\,\log(2)$
$\log\big((2\,x-3)\,(3\,x+10)\big) = \log(2^4)$
$(2\,x-3)\,(3\,x+10) = 2^4$
$6\,x^2 + 11\,x - 30 = 16$
$6\,x^2 + 11\,x - 46 = 0$
$\Delta = 11^2 - 4\cdot 6\cdot(-46) = 1225 = 35^2$
$x_1 = \frac{-11-35}{2\cdot 6} = -\frac{23}{6} \notin \mathrm{D}$ ou $x_2 = \frac{-11+35}{2\cdot 6} = 2 \in \mathrm{D}$
$\mathrm{S} = \{2\}$

4) $\log_2(x^2-4)$ est défini si $x^2-4=(x+2)\,(x-2)>0$

	-2		2	
$x+2$	$-$ 0 $+$		$+$	
$x-2$	$-$	$-$ 0 $+$		
x^2-4	$+$ 0 $-$ 0 $+$			

ainsi $\log_2(x^2-4)$ est défini si $x\in\,]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$

$\log_2(x+3)$ est défini si $x+3>0$, c'est-à-dire si $x>-3$.

En définitive, $\mathrm{D}=\,]-3\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

$\log_2(x^2-4)=2\,\log_2(x+3)$

$\log_2(x^2-4)=\log_2\big((x+3)^2\big)$

$x^2-4=(x+3)^2$

$x^2-4=x^2+6\,x+9$

$0=6\,x+13$

$x=-\frac{13}{6}\in\mathrm{D}$

$\mathrm{S}=\{-\frac{13}{6}\}$

5) $\log_3(35-x^3)$ est défini si $35-x^3>0$, c'est-à-dire si $x<\sqrt[3]{35}\approx 3{,}27$.

$\log_3(5-x)$ est défini si $5-x>0$, c'est-à-dire si $x<5$

En résumé $\mathrm{D}=\,]-\infty\,;+\sqrt[3]{35}[$.

$\log_3(35-x^3)=3\,\log_3(5-x)$

$\log_3(35-x^3)=\log\big((5-x)^3\big)$

$35-x^3=(5-x)^3$

$35-x^3=125-75\,x+15\,x^2-x^3$

$0=15\,x^2-75\,x+90$

$0=x^2-5\,x+6$

$0=(x-2)\,(x-3)$

$x=2\in\mathrm{D}\quad$ ou $\quad x=3\in\mathrm{D}$

$\mathrm{S}=\{2\,;3\}$

6) $\log_2(x)$ est défini si $x>0$.

$\log_4(4\,x+15)$ est défini si $4\,x+15>0$, c'est-à-dire si $x>-\frac{15}{4}$.

Par conséquent $\mathrm{D}=\,]0\,;+\infty[$.

Si $y=\log_2(x)$, alors $x=2^y=(4^{\frac{1}{2}})^y=4^{\frac{1}{2}\,y}$.

En d'autres termes, $\log_4(x)=\frac{1}{2}\,y=\frac{1}{2}\,\log_2(x)$.

Il en résulte $2\,\log_4(x)=\log_2(x)$.

$\log_2(x)=\frac{1}{2}+\log_4(4\,x+15)$

$2\ \log_4(x) = \log_4(4^{\frac{1}{2}}) + \log_4(4\,x+15)$

$\log_4(x^2) = \log_4(\sqrt{4}) + \log_4(4\,x+15)$

$\log_4(x^2) = \log_4(2) + \log_4(4\,x+15)$

$\log_4(x^2) = \log_4\big(2\,(4\,x+15)\big)$

$x^2 = 2\,(4\,x+15)$

$x^2 = 8\,x + 30$

$x^2 - 8\,x - 30 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot(-30) = 184 = 2^2\cdot 46$

$x_1 = \frac{-(-8)-2\sqrt{46}}{2\cdot 1} = 4 - \sqrt{46} \notin \mathrm{D}$ ou $x_2 = \frac{-(-8)+2\sqrt{46}}{2\cdot 1} = 4 + \sqrt{46} \in \mathrm{D}$

$\mathrm{S} = \{4+\sqrt{46}\}$

7) $\log_9(x)$ est défini si $x > 0$.
$\log_3(x^2+2)$ est défini si $x^2+2 > 0$, ce qui est toujours vrai, car $x^2+2 \geqslant 2$.
Dès lors, on a $\mathrm{D} = \,]0\,;+\infty[$.

Si $y = \log_3(x^2+2)$, alors $x^2+2 = 3^y = (9^{\frac{1}{2}})^y = 9^{\frac{1}{2}\,y}$.
Ainsi $\log_9(x^2+2) = \frac{1}{2}\,y = \frac{1}{2}\ \log_3(x^2+2)$.
Il s'ensuit que $2\ \log_9(x^2+2) = \log_3(x^2+2)$.

$\log_9(x) = \frac{1}{8}\ \log_3(x^2+2)$

$\log_9(x) = \frac{1}{8}\cdot 2\ \log_9(x^2+2)$

$\log_9(x) = \frac{1}{4}\ \log_9(x^2+2)$

$4\ \log_9(x) = \log_9(x^2+2)$

$\log_9(x^4) = \log_9(x^2+2)$

$x^4 = x^2+2$

$x^4 - x^2 - 2 = 0$

$(x^2-2)\,(x^2+1) = 0$

$(x+\sqrt{2})\,(x-\sqrt{2})\,(x^2+1) = 0$

$x = -\sqrt{2} \notin \mathrm{D}$ ou $x = \sqrt{2} \in \mathrm{D}$

$\mathrm{S} = \{\sqrt{2}\}$

8) $\log(x^2-7)$ est défini si $x^2-7 = (x+\sqrt{7})\,(x-\sqrt{7}) > 0$.

		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$	
$x+\sqrt{7}$	$-$	0	$+$		$+$
$x-\sqrt{7}$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-7	$+$	0	$-$	0	$+$

ainsi $\log_2(x^2-7)$ est défini si
$x \in \,]-\infty\,;-\sqrt{7}[\,\cup\,]\sqrt{7}\,;+\infty[$

$\log(x+3)$ est défini si $x+3 > 0$, c'est-à-dire si $x > -3$.
En résumé, on a $\mathrm{D} = \,]-3\,;-\sqrt{7}[\,\cup\,]\sqrt{7}\,;+\infty[$.

$\log(x^2-7)=2\,\log(x+3)$

$\log(x^2-7)=\log\big((x+3)^2\big)$

$x^2-7=(x+3)^2$

$x^2-7=x^2+6\,x+9$

$0=6\,x+16$

$x=-\frac{8}{3}\in \mathrm{D}$

$\mathrm{S}=\{-\frac{8}{3}\}$

9) $\log(x^2-9)$ est défini si $x^2-9=(x+3)\,(x-3)>0$.

	-3		3	
$x+3$	$-$ 0	$+$	|	$+$
$x-3$	$-$ |	$-$	0	$+$
x^2-9	$+$ 0	$-$	0	$+$

ainsi $\log(x^2-9)$ est défini si $x\in\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$

$\log(x+3)$ est défini si $x+3>0$, c'est-à-dire si $x>-3$.

$\log(2\,x+6)$ est défini si $2\,x+6>0$, c'est-à-dire si $x>-3$.

Par conséquent $\mathrm{D}=\,]3\,;+\infty[$.

$\log(20)+\log(x^2-9)-\log(x+3)=1+\log(2\,x+6)$

$\log(20)+\log(x^2-9)-\log(x+3)=\log(10^1)+\log(2\,x+6)$

$\log\left(\dfrac{20\,(x^2-9)}{x+3}\right)=\log\big(10\,(2\,x+6)\big)$

$\dfrac{20\,(x^2-9)}{x+3}=10\,(2\,x+6)$

$2\,(x^2-9)=(2\,x+6)\,(x+3)$

$2\,x^2-18=2\,x^2+12\,x+18$

$0=12\,x+36$

$x=-3\notin \mathrm{D}$

$\mathrm{S}=\varnothing$

10) $\log_7(x)$ n'est défini que si $x>0$.

Par ailleurs, $\log_x(7^3)$ n'a de sens que pour $x>0$.

En résumé $\mathrm{D}=\,]0\,;+\infty[$.

Posons $y=\log_x(7^3)$.

Alors $x^y=7^3$.

Il en suit que $x=x^1=x^{y\cdot\frac{1}{y}}=(x^y)^{\frac{1}{y}}=(7^3)^{\frac{1}{y}}=7^{\frac{3}{y}}$.

En d'autres termes $\log_7(x)=\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{\log_x(7^3)}$.

On en tire que $\log_x(7^3)=\dfrac{3}{\log_7(x)}$.

$\log_x(7^3) - \log_7(x) = 2$

$\dfrac{3}{\log_7(x)} - \log_7(x) = 2$

En posant $z = \log_7(x)$, cette équation devient :

$\dfrac{3}{z} - z = 2$

$0 = z + 2 - \dfrac{3}{z}$

$0 = \dfrac{z^2 + 2\,z - 3}{z}$

$0 = \dfrac{(z+3)\,(z-1)}{z}$

$z = -3 \quad \text{ou} \quad z = 1$

$\log_7(x) = -3$ implique $x = 7^{-3} = \frac{1}{343} \in \mathrm{D}$

$\log_7(x) = 1$ fournit $x = 7^1 = 7 \in \mathrm{D}$

$\mathrm{S} = \{\frac{1}{343}\,;7\}$