3.9 1) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

En posant $y = 2^x$, cette équation devient :

$y^2 - 5\,y + 6 = 0$

$(y - 2)\,(y - 3) = 0$

(a) $y = 2$

$2^x = 2$

$2^x = 2^1$

$x = 1$

(b) $y = 3$

$2^x = 3$

$x = \log_2(3) = \dfrac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1{,}58$

$\text{S} = \{1\,;1{,}58\}$

2) $9^x - 2 \cdot 3^x = 15$

$(3^2)^x - 2 \cdot 3^x = 15$

$3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 15$

$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x = 15$

En posant $y = 3^x$, cette équation devient :

$y^2 - 2\,y = 15$

$y^2 - 2\,y - 15 = 0$

$(y + 3)\,(y - 5) = 0$

(a) $y = -3$

$3^x = -3$ est impossible, car $3^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) $y = 5$

$3^x = 5$

$x = \log_3(5) = \dfrac{\log(5)}{\log(3)} \approx 1{,}46$

$\text{S} = \{1{,}46\}$

3) $e^{3x} - 5\,e^x + 4\,e^{-x} = 0$

En multipliant cette équation par e^x, on obtient :

$e^{4x} - 5\,e^{2x} + 4 = 0$

$(e^x)^4 - 5\,(e^x)^2 + 4 = 0$

En posant $y = e^x$, cette équation devient :

$y^4 - 5\,y^2 + 4 = 0$

$(y^2 - 1)\,(y^2 - 4) = 0$

$(y + 1)\,(y - 1)\,(y + 2)\,(y - 2) = 0$

(a) $y = -1$

$e^x = -1$ est impossible, car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) $y = 1$

$e^x = 1$

$x = \ln(1) = 0$

(c) $y = -2$

$e^x = -2$ est impossible, vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) $y = 2$

$e^x = 2$

$x = \ln(2) \approx 0{,}69$

$\mathrm{S} = \{0\,;0{,}69\}$

4) $e^{-x} - 5\,e^x + 4\,e^{3\,x} = 0$

En multipliant cette équation par e^x, on trouve

$1 - 5\,e^{2\,x} + 4\,e^{4\,x} = 0$

$1 - 5\,(e^x)^2 + 4\,(e^x)^4 = 0$

En posant $y = e^x$, cette équation devient :

$1 - 5\,y^2 + 4\,y^4 = 0$

En posant $z = y^2$, on obtient :

$1 - 5\,z + 4\,z^2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9 = 3^2$

$z_1 = \frac{-(-5)-3}{2\cdot 4} = \frac{1}{4}$ ou $z_2 = \frac{-(-5)+3}{2\cdot 4} = 1$

On en déduit $y = \pm\frac{1}{2}$ ou $y = \pm 1$.

(a) $y = -\frac{1}{2}$

$e^x = -\frac{1}{2}$ est impossible, car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) $y = \frac{1}{2}$

$e^x = \frac{1}{2}$

$x = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2) \approx -0{,}69$

(c) $y = -1$

$e^x = -1$ est impossible, étant donné que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) $y = 1$

$e^x = 1$

$x = \ln(1) = 0$

$S = \{-0{,}69\,;0\}$

5) $e^x - e^{-x} = 8$

En multipliant cette équation par e^x, on obtient

$e^{2\,x} - 1 = 8\,e^x$

En posant $y = e^x$, cette équation devient :

$y^2 - 1 = 8\,x$

$y^2 - 8\,x - 1 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 68 = 2^2 \cdot 17$

(a) $y = \frac{-(-8)-2\sqrt{17}}{2\cdot 1} = 4 - \sqrt{17}$

$e^x = 4 - \sqrt{17} < 0$ est manifestement impossible.

(b) $y = \frac{-(-8)+2\sqrt{17}}{2\cdot 1} = 4 + \sqrt{17}$

$e^x = 4 + \sqrt{17}$

$x = \ln(4 + \sqrt{17}) \approx 2{,}09$

$S = \{2{,}09\}$

6) $e^x - (1+e) + e^{-x+1} = 0$

En multipliant cette équation par e^x, on obtient :

$e^{2\,x} - (1+e)\,e^x + e = 0$

En posant $y = e^x$, cette équation se réécrit comme suit :

$y^2 - (1+e)\,y + e = 0$

$(y-1)\,(y-e) = 0$

(a) $y = 1$

$e^x = 1$

$x = \ln(1) = 0$

(b) $y = e$

$x = \ln(e) = 1$

$S = \{0\,;1\}$

7) $e^{6\,x} - 19\,e^{3\,x} - 216 = 0$

$(e^x)^6 - 19\,(e^x)^3 - 216 = 0$

En posant $y = e^x$, cette équation devient :

$y^6 - 19\,y^3 - 216 = 0$

En posant $z = y^3$, on trouve :

$z^2 - 19\,z - 216 = 0$

$\Delta = (-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216) = 1225 = 35^2$

$z_1 = \frac{-(-19)-35}{2 \cdot 1} = -8 \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{-(-19)+35}{2 \cdot 1} = 27$

Il s'ensuit $y = -2 \quad \text{ou} \quad y = 3\,.$

(a) $e^x = -2$ n'admet aucune solution, puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\,.$

(b) $e^x = 3$ délivre $x = \ln(3) \approx 1{,}1$

S $= \{1{,}1\}$

8) $4\,e^{-3\,x} - 5\,e^{-x} + e^x = 0$

En multipliant cette équation par $e^{3\,x}$, on trouve :

$4 - 5\,e^{2\,x} + e^{4\,x} = 0$

En posant $y = e^x$, on arrive à :

$4 - 5\,y^2 + y^4 = 0$

$(1 - y^2)\,(4 - y^2) = 0$

$(1 + y)\,(1 - y)\,(2 + y)\,(2 - y) = 0$

(a) $y = -1$

$e^x = -1$ est impossible, car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\,.$

(b) $y = 1$

$e^x = 1$

$x = \ln(1) = 0$

(c) $y = -2$

$e^x = -2$ est impossible, vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\,.$

(d) $y = 2$

$e^x = 2$

$x = \ln(2) \approx 0{,}69$

S $= \{0\,; 0{,}69\}$