

4.1

1) Si n est premier, alors n admet pour diviseur premier n .

2) Soit p le plus petit diviseur positif propre de n .

Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p q = n$.

(a) Supposons par l'absurde que p n'est pas premier.

p est alors composé : il existe $a, b \in \mathbb{N} - \{1; p\}$ tel que $p = a b$.

Puisque $n = p q = (a b) q = a (b q)$, il en résulte que a est un diviseur positif propre de n .

Mais $a = \frac{p}{b}$ est strictement plus petit que p (vu que $b > 1$), ce qui contredit la définition de p , qui doit être le plus petit diviseur positif propre de n .

(b) L'égalité $p q = n$ signifie que q est aussi un diviseur positif propre de n .
Par définition de p , on a $p \leq q$.

(c) En multipliant par p l'inégalité $p \leq q$, on obtient $p^2 \leq p q = n$.

Étant donné que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on déduit de $p^2 \leq n$ que $p = \sqrt{p^2} \leq \sqrt{n}$.