4.11 1) Posons $q = p_1^{\alpha_1-\beta_1}\, p_2\alpha_2 - \beta_2 \,\ldots\, p_k^{\alpha_k-\beta_k}$.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$ on a $\beta_i \leqslant \alpha_i$, c'est-à-dire $0 \leqslant \alpha_i - \beta_i$, si bien que $q \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} d\,q &= (p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \,\ldots\, p_k^{\beta_k}) \cdot (p_1^{\alpha_1-\beta_1}\, p_2^{\alpha_2-\beta_2} \,\ldots\, p_k^{\alpha_k-\beta_k}) \\ &= p_1\beta_1 + (\alpha_1 - \beta_1)\, p_2^{\beta_2+(\alpha_2-\beta_2)} \,\ldots\, p_k^{\beta_k+(\alpha_k-\beta_k)} \\ &= p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \,\ldots\, p_k^{\alpha_k} \\ &= n \end{aligned}$$

Ainsi d est un diviseur de n.

2) Le produit des décompositions en facteurs premiers de d et q fournit une décomposition en produit de facteurs premiers de n.
Vu le théorème fondamental de l'arithmétique, c'est **la** décomposition en produit de facteurs premiers de n.
Les seuls diviseurs premiers intervenant dans les décompositions de d et de q sont donc les p_i et ils ne peuvent intervenir qu'avec un exposant $\leqslant \alpha_i$.
Par conséquent d est de la forme $d = p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \,\ldots\, p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.