

4.15 Décomposons un entier naturel n en produit de facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

Le nombre de diviseurs de n s'élève à $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 12$.

12 peut se décomposer en produits de facteurs ≥ 2 de quatre manières :

$$12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

1) Le plus petit entier de la forme p_1^{11} est $2^{11} = 2048$.

2) Le plus petit entier de la forme $p_1^5 \cdot p_2^1$ est $2^5 \cdot 3^1 = 96$.

3) Le plus petit entier de la forme $p_1^3 \cdot p_2^2$ est $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

4) Le plus petit entier de la forme $p_1^2 \cdot p_2^1 \cdot p_3^1$ est $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$.

On conclut que l'entier recherché est 60.