

4.6

1) Supposons $n \equiv 0 \pmod{6}$.

Alors n est divisible par 6.

(a) Si $n = 6$, alors $n = 2 \cdot 3$ n'est pas premier.

(b) Si $n \neq 6$, alors n admet 6 pour diviseur positif propre, si bien que n n'est pas premier.

2) Supposons $n \equiv \pm 2 \pmod{6}$.

Alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6q \pm 2 = 2(3q \pm 1)$.

Puisque l'on suppose $n \neq 2$, il en résulte que n admet 2 comme diviseur positif propre, de sorte que n n'est pas premier.

3) Supposons $n \equiv 3 \pmod{6}$.

Alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6q + 3 = 3(2q + 1)$.

Comme l'on suppose $n \neq 3$, il apparaît que n admet 3 comme diviseur positif propre, ce qui signifie que n n'est pas premier.

On a donc montré qu'un nombre n n'est pas premier si $n \not\equiv \pm 1 \pmod{6}$.

En d'autres termes, si un nombre n est premier, alors $n \equiv \pm 1 \pmod{6}$: il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = 6q \pm 1$.