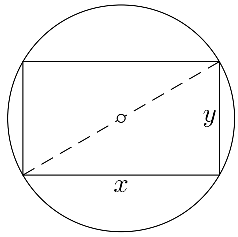
7.11 1) Désignons par x et y la longueur et la largeur du rectangle.
Son aire vaut $f(x,y) = x\,y$.



2) Le théorème de Pythagore donne $x^2 + y^2 = 4$.

3) On en tire $y = \sqrt{4 - x^2}$.
(La possibilité $y = -\sqrt{4-x^2}$ est à écarter, vu que la largeur y du rectangle ne saurait être négative.)

Par suite, l'aire du rectangle est donnée par $f(x) = x\,\sqrt{4-x^2}$.

Pour que les dimensions du rectangle restent positives, on a $\mathrm{D}_f = [0\,;2]$.

4) Puisque l'aire du rectangle est positive et que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, il revient au même de maximiser l'aire du rectangle ou de maximiser le carré de l'aire du rectangle.

On recherche ainsi le maximum de la fonction $f^2(x) = x^2\,(4-x^2)$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [0\,;2]$.

$$\big(f^2(x)\big)' = \big(x^2\,(4-x^2)\big)' = (4\,x^2 - x^4)' = 8\,x - 4\,x^3 = 4\,x\,(2-x^2)$$
$$= 4\,x\,(\sqrt{2}+x)\,(\sqrt{2}-x)$$

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$4\,x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\sqrt{2}+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\sqrt{2}-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$(f^2)'$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f^2	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,\sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 2$

$f(0) = 0\,\sqrt{4-0^2} = 0$

$f(2) = 2\,\sqrt{4-2^2} = 0$

5) L'aire du rectangle est maximale si sa longueur vaut $x = \sqrt{2}$.

Sa largeur vaut alors $y = \sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$.
On remarque que le rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire dans un cercle est un carré.