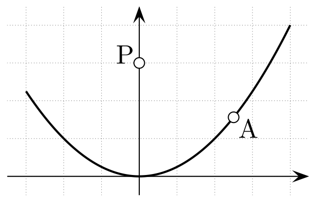
7.13 1) Soit $\mathrm{A}(x\,;\frac{1}{4}\,x^2)$ un point du graphe de f.



La distance entre les points A et P vaut :

$$d(x) = \delta(\mathrm{A}\,;\mathrm{P}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0-x \\ 3-\frac{1}{4}\,x^2 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sqrt{(-x)^2 + (3-\tfrac{1}{4}\,x^2)^2} = \sqrt{x^2+9-\tfrac{3}{2}\,x^2+\tfrac{1}{16}\,x^4}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{16}\,x^4 - \tfrac{1}{2}\,x^2 + 9}$$

Les conditions de l'énoncé stipulent que $\mathrm{D}_d = \mathrm{D}_f = [-3\,;4]$.

2) Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, le problème revient à maximiser et à minimiser le carré de la distance entre les points A et P, c'est-à-dire la fonction $d^2(x) = \frac{1}{16}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + 9$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_d = [-3\,;4]$.

$$\big(d^2(x)\big)' = (\tfrac{1}{16}\,x^4 - \tfrac{1}{2}\,x^2+9)' = \tfrac{1}{4}\,x^3 - x = \tfrac{1}{4}\,x\,(x^2-4) = \tfrac{1}{4}\,x\,(x+2)\,(x-2)$$

		-2		0		2	
$\frac{1}{4}\,x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$(d^2)'$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
d^2	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$d(-2) = \sqrt{\tfrac{1}{16}\,(-2)^4 - \tfrac{1}{2}\,(-2)^2 + 9} = 2\,\sqrt{2}$$

$$d(0) = \sqrt{\tfrac{1}{16}\,0^4 - \tfrac{1}{2}\,0^2 + 9} = 3$$

$$d(2) = \sqrt{\tfrac{1}{16}\,2^4 - \tfrac{1}{2}\,2^2 + 9} = 2\,\sqrt{2}$$

$$d(-3) = \sqrt{\tfrac{1}{16}\,(-3)^4 - \tfrac{1}{2}\,(-3)^2 + 9} = \tfrac{3}{4}\,\sqrt{17}$$

$$d(4) = \sqrt{\tfrac{1}{16}\,2^4 - \tfrac{1}{2}\,2^2 + 9} = \sqrt{17}$$

3) Le point A est le plus près du point P si $x=-2$ ou si $x=2$.
Les points du graphe de f les plus proches de P sont ainsi $\big(-2\,;f(-2)\big) = (-2\,;1)$ et $\big(2\,;f(2)\big) = (2\,;1)$.

Le point A est le plus loin du point P si $x=4$.
Le point du graphe de f le plus éloigné de P est donc $\big(4\,;f(4)\big) = (4\,;4)$.