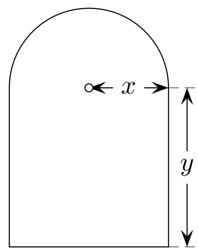
7.14

1) Soient x le rayon du demi-cercle supérieur et y la hauteur du rectangle inférieur.



Il s'agit de maximiser l'aire de la fenêtre, à savoir $f(x, y) = 2\,x\,y + \frac{1}{2}\,\pi\,x^2$

2) Le périmètre du rectangle vaut $6 = 4\,x + 2\,y$.

3) On en déduit que $y = 3 - 2\,x$.

Par conséquent, l'aire de la fenêtre est donnée par la fonction $f(x) = 2\,x\,(3 - 2\,x) + \frac{1}{2}\,\pi\,x^2 = 6\,x - 4\,x^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,x^2$

Il faut que les dimensions x et y de la fenêtre soient positives.
$0 \leqslant y = 3 - 2\,x$ implique $x \leqslant \frac{3}{2}$.
En résumé, on a $\mathrm{D}_f = [0\,; \frac{3}{2}]$.

4) Déterminons le maximum de la fonction $f(x) = 6\,x - 4\,x^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,x^2$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [0\,; \frac{3}{2}]$.

$f'(x) = (6\,x - 4\,x^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,x^2)' = 6 - 8\,x + \pi\,x = 6 - (8 - \pi)\,x$

		$\frac{6}{8-\pi}$	
$6 - (8 - \pi)\,x$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(\frac{6}{8-\pi}) = 6\,\frac{6}{8-\pi} - 4\,(\frac{6}{8-\pi})^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,(\frac{6}{8-\pi})^2 \approx 3{,}70$

$f(0) = 6\,0 - 4\,0^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,0^2 = 0$

$f(\frac{3}{2}) = 6\,\frac{3}{2} - 4\,(\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}\,\pi\,(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{8}\,\pi \approx 3{,}53$

5) La fenêtre laisse passer un maximum de lumière si le rayon du demi-cercle supérieur mesure $x = \frac{6}{8-\pi}$ m.
Dans ce cas, la largeur de la fenêtre vaut $2\,x = 2 \cdot \frac{6}{8-\pi} = \frac{12}{8-\pi}$ m et sa hauteur vaut $y = 3 - 2\,x = 3 - \frac{12}{8-\pi} = \frac{3\,(8-\pi)-12}{8-\pi} = \frac{12-3\,\pi}{8-\pi}$ m.