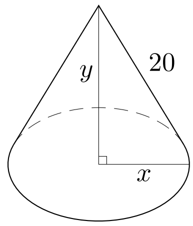
7.15 1) Désignons respectivement par x et y le rayon et la hauteur du cône.



Le volume du cône est donné par la formule $f(x, y) = \frac{1}{3}\,\pi\,x^2\,y$.

2) Le théorème de Pythagore fournit la relation $20^2 = x^2 + y^2$.

3) On en tire que $x^2 = 400 - y^2$.

Le volume du cône s'écrit ainsi $f(y) = \frac{1}{3}\,\pi\,(400 - y^2)\,y$.

Les dimensions x et y devant être positives, on a $\mathrm{D}_f = [0\,;20]$.

4) Déterminons le maximum de la fonction $f(y) = \frac{1}{3}\,\pi\,(400 - y^2)\,y$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [0\,;20]$.

$$f'(y) = (\tfrac{1}{3}\,\pi\,(400 - y^2)\,y)' = \tfrac{1}{3}\,\pi\,(400\,y - y^3)' = \tfrac{1}{3}\,\pi\,(400 - 3\,y^2)$$
$$= \pi\,(\tfrac{400}{3} - y^2) = \pi\,(\tfrac{20\sqrt{3}}{3} + y)\,(\tfrac{20\sqrt{3}}{3} - y)$$

		$-\frac{20\sqrt{3}}{3}$		$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	
π	$+$		$+$		$+$
$\frac{20\sqrt{3}}{3} + y$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{20\sqrt{3}}{3} - y$	$+$		$+$	0	$-$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$f(\frac{20\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3}\,\pi\,(400 - (\frac{20\sqrt{3}}{3})^2)\,\frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{16\ 000\,\pi\,\sqrt{3}}{27}$

$f(0) = \frac{1}{3}\,\pi\,(400 - 0^2)\,0 = 0$

$f(20) = \frac{1}{3}\,\pi\,(400 - 20^2)\,20 = 0$

5) Le cône possède un volume maximal de $\frac{16\ 000\,\pi\,\sqrt{3}}{27}$ cm^3 si sa hauteur mesure $y = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

Son rayon vaut alors $x = \sqrt{400 - y^2} = \sqrt{400 - (\frac{20\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{20\sqrt{6}}{3}$ cm.