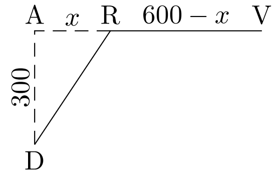
7.16 1) On note D le point de départ, R le point où l'on rejoint la route et V le point où se situe la voiture.



Vu le théorème de Pythagore la distance entre les points D et R vaut $\sqrt{300^2 + x^2}$ m.
Puisque l'on se déplace dans la boue à 3 m/s, le temps pour parcourir cette distance est de $\frac{1}{3}\sqrt{300^2 + x^2}$ s.

Comme l'on avance à 5 m/s sur la route et que la distance entre les points R et V est de $600 - x$ m, il faut, pour parcourir cette distance, $\frac{1}{5}\,(600 - x)$ s.

En définitive, le temps pour rejoindre la voiture depuis le point D est donné par $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{300^2 + x^2} + \frac{1}{5}\,(600 - x)$.

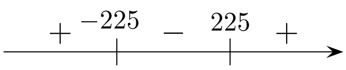
L'énoncé indique clairement le domaine de définition : $D_f = [0\,;600]$.

2) Déterminons le minimum de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{300^2 + x^2} + \frac{1}{5}\,(600 - x)$ sur l'intervalle $D_f = [0\,;600]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\tfrac{1}{3}\sqrt{300^2 + x^2} + \tfrac{1}{5}\,(600 - x)\Big)' = \tfrac{1}{3}\,\Big((300^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\Big)' + \tfrac{1}{5}\,(600 - x)' \\ &= \tfrac{1}{6}\,(300^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(300^2 + x^2)' + \tfrac{1}{5}\,(-1) \\ &= \frac{x}{3\sqrt{300^2 + x^2}} - \frac{1}{5} = \frac{5\,x - 3\sqrt{300^2 + x^2}}{15\sqrt{300^2 + x^2}} \end{aligned}$$

Pour trouver les points critiques, résolvons l'équation
$5\,x - 3\sqrt{300^2 + x^2} = 0$
$5\,x = 3\sqrt{300^2 + x^2}$
$25\,x^2 = 9\,(300^2 + x^2)$
$16\,x^2 = 900^2$
$x^2 = 225^2$
$x = \pm 225$

En évaluant $f'(x)$ en diverses valeurs, on obtient les signes suivants :



On en déduit que la fonction f possède un minimum local si $x = 225$.

$f(0) = \frac{1}{3}\sqrt{300^2 + 0^2} + \frac{1}{5}\,(600 - 0) = 220$

$f(225) = \frac{1}{3}\sqrt{300^2 + 225^2} + \frac{1}{5}\,(600 - 225) = 200$

$f(600) = \frac{1}{3}\sqrt{300^2 + 600^2} + \frac{1}{5}\,(600 - 600) = 100\sqrt{5} \approx 223{,}67$

3) Le temps minimal pour rejoindre la voiture est de 200 s.
Pour cela, il faut rejoindre la route au point R situé à 225 m du point A.

On remarque que ces calculs (dont on a estimé le temps négligeable) nous ont permis de gagner une vingtaine de secondes !