7.5 1) Pour utiliser le moins de matériau possible, il faut minimiser l'aire totale du cylindre.

L'aire latérale du cylindre vaut $2\,\pi\,r\,h$.

L'aire totale du cylindre vaut donc $f(h,r) = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2$.

2) Le volume du cylindre est donné : $\mathrm{V} = \pi\,r^2\,h$.

3) On en déduit que $h = \dfrac{\mathrm{V}}{\pi\,r^2}$.

L'aire totale du cylindre devient ainsi :

$f(r) = 2\,\pi\,r\,\dfrac{\mathrm{V}}{\pi\,r^2} + 2\,\pi\,r^2 = \dfrac{2\,\mathrm{V}}{r} + 2\,\pi\,r^2$.

Étant donné que le rayon du cylindre doit être positif, on a $\mathrm{D}_f = \,]0\,;+\infty[$.

4) Recherchons la valeur minimale prise par la fonction $f(r) = \dfrac{2\,\mathrm{V}}{r} + 2\,\pi\,r^2$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = \,]0\,;+\infty[$.

$$f'(r) = \left(\frac{2\,\mathrm{V}}{r} + 2\,\pi\,r^2\right)' = (2\,\mathrm{V}\,r^{-1} + 2\,\pi\,r^2)' = -2\,\mathrm{V}\,r^{-2} + 4\,\pi\,r$$
$$= -\frac{2\,\mathrm{V}}{r^2} + 4\,\pi\,r = \frac{4\,\pi\,r^3 - 2\,\mathrm{V}}{r^2} = \frac{2\,(2\,\pi\,r^3 - \mathrm{V})}{r^2}$$

		0		$\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}$	
2	$+$	‖	$+$	0	$+$
$2\,\pi\,r^3 - \mathrm{V}$	$-$	‖	$-$		$+$
x^2	$+$	‖	$+$		$+$
f'	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} f(r) = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \frac{2\,\mathrm{V}}{r} + 2\,\pi\,r^2 = +\infty + 0 = +\infty$$
$$\lim_{r\to+\infty} f(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{2\,\mathrm{V}}{r} + 2\,\pi\,r^2 = 0 + \infty = +\infty$$

5) La fonction f atteint par conséquent son minimum lorsque $r = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}$.

$$h = \frac{\mathrm{V}}{\pi\,r^2} = \frac{\mathrm{V}}{\pi\,\left(\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}\right)^2} = \frac{\mathrm{V}}{\pi\,\left(\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}} = \frac{\mathrm{V}\,\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}}}{\pi\,\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}} = 2\,\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}}{2\,\pi}} = 2\,r$$

On constate en particulier que l'on utilise un minimum de matériau si la hauteur du cylindre égale son diamètre.