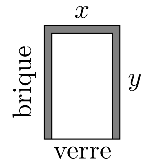
7.6

1) Soient x et y la largeur et la longueur de la bibliothèque. Si p désigne le prix linéaire de la brique, alors le prix linéaire du verre vaut $2\,p$.



Le coût des matériaux vaut $f(x,y) = (x + 2\,y)\,p + x \cdot 2\,p = 3\,p\,x + 2\,p\,y$.

2) Comme la bibliothèque doit avoir une superficie de 2400 m^2, on tire que $x\,y = 2400$.

3) Il en résulte $y = \dfrac{2400}{x}$.

Ainsi le coût des matériaux vaut $f(x) = 3\,p\,x + 2\,p\,\dfrac{2400}{x} = 3\,p\,x + \dfrac{4800\,p}{x}$.

Vu que la largeur de la bibliothèque doit être positive, on a $\mathrm{D}_f =]0\,;+\infty[$.

4) Recherchons le minimum de la fonction $f(x) = 3\,p\,x + \dfrac{4800\,p}{x}$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f =]0\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(3\,p\,x + \frac{4800\,p}{x}\right)' = (3\,p\,x + 4800\,p\,x^{-1})' = 3\,p - 4800\,p\,x^{-2} \\
&= 3\,p - \frac{4800\,p}{x^2} = \frac{3\,p\,x^2 - 4800\,p}{x^2} = \frac{3\,p\,(x^2 - 1600)}{x^2} \\
&= \frac{3\,p\,(x+40)\,(x-40)}{x^2}
\end{aligned}$$

		-40		0		40	
$3\,p$	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
$x+40$	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$
$x-40$	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
x^2	$+$		$+$	‖	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	‖	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 3\,p\,x + \frac{4800\,p}{x} = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3\,p\,x + \frac{4800\,p}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

$$f(40) = 3\,p \cdot 40 + \frac{4800\,p}{40} = 240\,p$$

5) Le coût des matériaux est minimal si la bibliothèque a une largeur de $x = 40$ m.

Dans ce cas, elle mesure $y = \dfrac{2400}{40} = 60$ m de long.

Le coût s'élève alors à $240\,p$, où p désigne le prix linéaire de la brique.