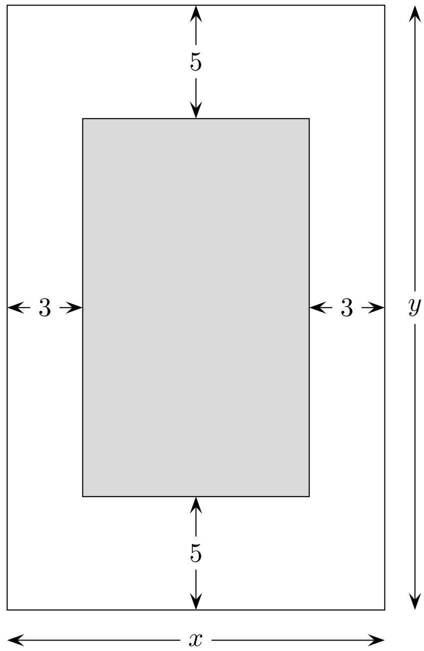
**7.7**

1) Désignons par $x$ et $y$ la largeur et la longueur de la feuille de papier.

   Il s'agit de minimiser l'aire de la feuille de papier, c'est-à-dire $f(x, y) = x\,y$.




2) Le texte imprimé a une largeur de $x-6$ cm et une longueur de $y - 10$ cm.
   Son aire vaut ainsi $(x-6)\,(y-10) = 540$.

3) On en déduit $y - 10 = \dfrac{540}{x-6}$
   puis $y = \dfrac{540}{x-6} + 10$.

   L'aire de la feuille de papier s'exprime donc par $f(x) = \dfrac{540\,x}{x-6} + 10\,x$.

   Vu que la largeur de la feuille de papier doit être positive et qu'il doit y avoir au moins 3 cm de marge de chaque côté, on a $\mathrm{D}_f = \,]6\,;+\infty[$.

4) Déterminons la plus petite valeur prise par la fonction $f(x) = \dfrac{540\,x}{x-6} + 10\,x$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = \,]6\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \left(\frac{540\,x}{x-6} + 10\,x\right)' = \frac{(540\,x)'\,(x-6) - 540\,x\,(x-6)'}{(x-6)^2} + 10$$

$$= \frac{540\,(x-6) - 540\,x \cdot 1}{(x-6)^2} + 10 = \frac{-3240}{(x-6)^2} + 10 = \frac{-3240 + 10\,(x-6)^2}{(x-6)^2}$$

$$= \frac{10\,\big((x-6)^2 - 324\big)}{(x-6)^2} = \frac{10\,\big((x-6)+18\big)\,\big((x-6)-18\big)}{(x-6)^2}$$

$$= \frac{10\,(x+12)\,(x-24)}{(x-6)^2}$$

| | | $-12$ | | $6$ | | $24$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10$ | $+$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $x+12$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $x-24$ | $-$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x-6)^2$ | $+$ | | $+$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$$f(24) = \frac{540 \cdot 24}{24-6} + 10 \cdot 24 = 960$$

$$\lim_{\substack{x \to 6 \\ x > 6}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 6 \\ x > 6}} \frac{540\,x}{x-6} + 10\,x = +\infty + 60 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{540\,x}{x-6} + 10\,x = 540 + \infty = +\infty$$

5) On utilise un minimum de papier si la feuille a une largeur de $x = 24$ cm.
   Dans ce cas, sa longueur vaut $y = \dfrac{540}{24-6} + 10 = 40$ cm.
   On utilise ainsi seulement $f(24) = 960$ cm$^2$.