7.8 1) Désignons par x et $200 - x$ les longueurs des deux parties de la corde.

Le carré ayant un périmètre de x cm, ses côtés mesurent $\frac{1}{4}\,x$ cm. Aussi son aire vaut-elle $\frac{1}{16}\,x^2$ cm^2.

Le cercle a un périmètre de $200 - x$ cm, de sorte que son rayon vaut $\frac{1}{2\,\pi}\,(200 - x)$ cm. Son aire est par conséquent de $\frac{1}{4\,\pi}\,(200 - x)^2$ cm^2.

La somme des aires du carré et du cercle est dès lors donnée par la fonction $f(x) = \frac{1}{16}\,x^2 + \frac{1}{4\,\pi}\,(200 - x)^2$.

Manifestement $\mathrm{D}_f = [0\,;200]$, car la longueur de la première partie de la corde doit être comprise entre 0 cm et 200 cm.

2) Recherchons la plus grande valeur prise par la fonction $f(x) = \frac{1}{16}\,x^2 + \frac{1}{4\,\pi}\,(200 - x)^2$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [0\,;200]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\tfrac{1}{16}\,x^2 + \tfrac{1}{4\,\pi}\,(200 - x)^2\right)' = \tfrac{1}{16}\,2\,x + \tfrac{1}{4\,\pi}\,2\,(200 - x)\,(200 - x)' \\ &= \tfrac{1}{8}\,x - \tfrac{1}{2\,\pi}\,(200 - x) = \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2\,\pi}\right)x - \tfrac{100}{\pi} = \tfrac{\pi+4}{8\,\pi}\,x - \tfrac{100}{\pi} \end{aligned}$$

$0 = f'(x) = \frac{\pi+4}{8\,\pi}\,x - \frac{100}{\pi}$ implique $x = \frac{100}{\pi} \cdot \frac{8\,\pi}{\pi+4} = \frac{800}{\pi+4} \approx 112{,}02$

		$\frac{800}{\pi+4}$	
$\frac{\pi+4}{8\,\pi}\,x - \frac{100}{\pi}$	$-$	0	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(0) = \frac{1}{16}\,0^2 + \frac{1}{4\,\pi}\,(200 - 0)^2 = \frac{10\ 000}{\pi} \approx 3183{,}10$

$f(200) = 2500$

3) Nous sommes à la recherche d'un maximum de la fonction f (et non d'un minimum).

La fonction f prend sa plus grande valeur sur l'intervalle $[0\,;200]$ en 0.

Cela signifie que la corde ne doit pas être coupée : elle doit plutôt être utilisée en entier pour former le cercle.