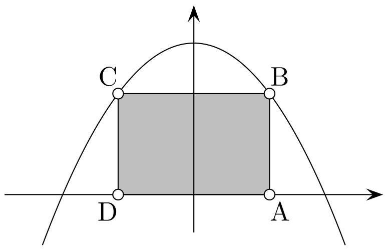
7.9 1) Posons $f(x) = -\frac{1}{3}\,x^2 + 4$.

La fonction f est paire :

$f(-x) = -\frac{1}{3}\,(-x)^2 + 4 = -\frac{1}{3}\,x^2 + 4$
$= f(x)$

Son graphe admet donc l'axe Oy comme axe de symétrie.



Posons $\mathrm{A}(x\,;0)$. Alors $\mathrm{B}(x\,;-\frac{1}{3}\,x^2+4)$, $\mathrm{C}(-x\,;-\frac{1}{3}\,x^2+4)$ et $\mathrm{D}(-x\,;0)$.

L'aire du rectangle grisé vaut ainsi $g(x) = 2\,x\,(-\frac{1}{3}\,x^2+4) = -\frac{2}{3}\,x^3 + 8\,x$.

$0 = -\frac{1}{3}\,x^2 + 4$ implique $x^2 = 12$, c'est-à-dire $x = \pm 2\sqrt{3}$.

C'est pourquoi $\mathrm{D}_g = [0\,;2\sqrt{3}]$.

2) Recherchons le maximum de la fonction $g(x) = -\frac{2}{3}\,x^3 + 8\,x$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_g = [0\,;2\sqrt{3}]$.

$g'(x) = (-\frac{2}{3}\,x^3 + 8\,x)' = -2\,x^2 + 8 = -2\,(x^2-4) = -2\,(x+2)\,(x-2)$

		-2		2	
-2	$-$		$-$		$-$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$g(2) = -\frac{2}{3}\,2^3 + 8 \cdot 2 = \frac{32}{3}$

$g(0) = -\frac{2}{3}\,0^3 + 8 \cdot 0 = 0$

$g(2\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\,(2\sqrt{3})^3 + 8 \cdot 2\sqrt{3} = 0$

3) L'aire du rectangle grisé est maximale si $x = 2$.

Dans ce cas, le rectangle a une longueur de $2\,x = 4$ et une largeur de $f(2) = -\frac{1}{3}\,2^2 + 4 = \frac{8}{3}$. Son aire vaut $g(2) = \frac{32}{3}$.