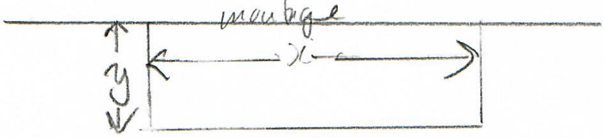
Optimisation

Exemple : Le long d'une belle montagne (rectiligne), on doit construire un enclôt rectangulaire pour des licornes. Il nous faut $750\,m^2$. Le magicien nous facture 15.– par "mètre de montagne" et le fil (fin) d'argent nous coûte 10.– par mètre. Quelles sont les dimensions de l'enclôt le meilleur marché ainsi que son prix ?



Quantité à minimiser : le prix total : $15 \cdot x + (x + 2y) \cdot 10 = 25x + 20y$

On a la contrainte : $x \cdot y = 750 \Rightarrow y = \frac{750}{x}$

Donc prix total : $25x + 20\frac{750}{x} = 25x + \frac{15'000}{x} = p(x)$

Condition d'existence : $x \in]0; +\infty[$

Dérivée de la fonction : $p'(x) = 25 - \frac{15'000}{x^2} = \frac{25x^2 - 15'000}{x^2} = \frac{25(x^2 - 600)}{x^2} = \frac{25(x - 10\sqrt{6})(x + 10\sqrt{6})}{x^2}$

Croissance :

x		$-10\sqrt{6}$		0		$10\sqrt{6}$		∞
$25(x^2-600)$	+	0	−		−	0	+	
x^2	+		+	‖	+		+	
$p'(x)$	+	0	−	‖	−	0	+	
$p(x)$	↗	Max	↘	‖	↘	min	↗	

(on s'intéresse uniquement aux valeurs $x \in]0; +\infty[$)

donc le prix est minimal pour $x = 10\sqrt{6}\,m$ et $y = \frac{750}{10\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{6}}{2}\,m$

pour un prix de $p(10\sqrt{6}) = 25 \cdot 10\sqrt{6} + \frac{15'000}{10\sqrt{6}} \cong 1224{,}75$.–

Remarque : Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$ alors $g(x) = f^2(x)$ a la même croissance sur $[a; b]$ que $f(x)$. (7.11, 7.12, 7.13)

Car $g'(x) = (f^2(x))' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$

7.5 en standard, on prend $V = 2\pi$.

7.16 seulement en renforcé