3.11 1) (a) $2\,(5\,n+3)-5\,(2\,n+1)=10\,n+6-10\,n-5=1$

(b) Soit $d=\text{pgcd}(5\,n+3, 2\,n+1)$.

Vu le théorème de Bachet de Mériziac, d doit diviser $2\,(5\,n+3)-5\,(2\,n+1)=1$.

C'est pourquoi, on ne peut qu'avoir $d=1$.

Cela signifie que les entiers $5\,n+3$ et $2\,n+1$ sont premiers entre eux.

2) En suivant le même raisonnement, il suffit de montrer qu'il existe des entiers x et y tels que $a\,x+b\,y=1$.

(a) $a\,x+b\,y=(-n+4)\,x+(3\,n-11)\,y=\underbrace{(-x+3\,y)}_{0}\,n+\underbrace{(4\,x-11\,y)}_{1}$

$\begin{cases} -x+\ \ 3\,y=0 \\ 4\,x-11\,y=1 \end{cases}$ donne $x=3\in\mathbb{Z}$ et $y=1\in\mathbb{Z}$

Comme $3\,a+b=1$, les entiers a et b sont premiers entre eux.

(b) $a\,x+b\,y=(6\,n+3)\,x+(3\,n+1)\,y=\underbrace{(6\,x+3\,y)}_{0}\,n+\underbrace{(3\,x+y)}_{1}$

$\begin{cases} 6\,x+3\,y=0 \\ 3\,x+\ \ y=1 \end{cases}$ implique $x=1\in\mathbb{Z}$ et $y=-2\in\mathbb{Z}$

Vu que $a-2\,b=1$, les entiers a et b sont premiers entre eux.

(c) $a\,x+b\,y=(2\,n-1)\,x+(-7\,n+3)\,y=\underbrace{(2\,x-7\,y)}_{0}\,n+\underbrace{(-x+3\,y)}_{1}$

$\begin{cases} 2\,x-7\,y=0 \\ -x+3\,y=1 \end{cases}$ implique $x=-7\in\mathbb{Z}$ et $y=-2\in\mathbb{Z}$

Puisque $-7\,a-2\,b=1$, les entiers a et b sont premiers entre eux.