3.15 1) Supposons que l'équation diophantienne $a\,x + b\,y = c$ admette une solution, c'est-à-dire qu'il existe des entiers x_0 et y_0 tels que $a\,x_0 + b\,y_0 = c$.

Le théorème de Bachet de Mériziac garantit l'existence d'un entier k tel que $a\,x_0 + b\,y_0 = k\,d$.

Par suite, $k\,d = c$, ce qui signifie que d divise c.

2) Supposons que d divise c. Il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $c = d\,q$.

(a) Le théorème de Bézout assure l'existence d'entiers u et v tels que $a\,u + b\,v = d$.

En multipliant cette dernière égalité par q, on obtient :

$a \underbrace{q\,u}_{x_0} + b \underbrace{q\,v}_{y_0} = \underbrace{d\,q}_{c}$ c'est-à-dire $a\,x_0 + b\,y_0 = c$.

(b) Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$a\,(x_0 + \frac{b}{d}\,k) + b\,(y_0 - \frac{a}{d}\,k) = a\,x_0 + \frac{a\,b}{d}\,k + b\,y_0 - \frac{a\,b}{d}\,k = a\,x_0 + b\,y_0 = c$

(c) Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ avec $a\,x + b\,y = c$.

i. La soustraction des équations $\begin{cases} a\,x \;+ b\,y \;= c \\ a\,x_0 + b\,y_0 = c \end{cases}$ donne

$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$, d'où suit $a\,(x - x_0) = b\,(y_0 - y)$.

En divisant cette dernière équation par d, on trouve :

$\frac{a}{d}\,(x - x_0) = \frac{b}{d}\,(-y + y_0)$.

ii. D'après l'exercice 3.12, les entiers $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

De plus, $\frac{a}{d}$ divise $\frac{a}{d}\,(x - x_0) = \frac{b}{d}\,(-y + y_0)$.

Le lemme de Gauss implique que $\frac{a}{d}$ divise $-y + y_0$.

iii. Puisque $\frac{a}{d}$ divise $-y + y_0$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{a}{d}\,k = -y + y_0$ ou encore $y = y_0 - \frac{a}{d}\,k$.

iv. Déterminons x à partir de l'équation $\frac{a}{d}\,(x - x_0) = \frac{b}{d}\,(-y + y_0)$:

$x - x_0 = \frac{d}{a} \cdot \frac{b}{d}\,(-y + y_0) = \frac{b}{a}\,(-y + y_0) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{d}\,k = \frac{b}{d}\,k$

$x = x_0 + \frac{b}{d}\,k$