3.16 1) Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer pgcd(42, 25) :

$$\begin{array}{rcl} 42 = 25 \cdot 1 + 17 & \Longrightarrow & 17 = 42 - 25 \cdot 1 \\ 25 = 17 \cdot 1 + 8 & \Longrightarrow & 8 = 25 - 17 \cdot 1 \\ 17 = 8 \cdot 2 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 17 - 8 \cdot 2 \\ 8 = 1 \cdot 8 & & \end{array}$$

Ainsi $\mathrm{pgcd}(42, 25) = 1$.
Comme $1 \mid 3$, l'équation diophantienne admet une infinité de solutions.

Pour en déterminer une solution particulière, cherchons les entiers u et v tels que $42\,u + 25\,v = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= 17 - 8 \cdot 2 \\ &= 17 - (25 - 17 \cdot 1) \cdot 2 = 25 \cdot (-2) + 17 \cdot 3 \\ &= 25 \cdot (-2) + (42 - 25 \cdot 1) \cdot 3 = 42 \cdot 3 + 25 \cdot (-5) \end{aligned}$$

En multipliant l'égalité $42 \cdot 3 + 25 \cdot (-5) = 1$ par 3, on trouve la solution particulière $42 \cdot \underbrace{9}_{x_0} + 25 \cdot \underbrace{(-15)}_{y_0} = 3$.

Finalement, la solution générale est donnée par :

$$\begin{cases} x = 9 + \frac{25}{1}\,k = 9 + 25\,k \\ y = -15 - \frac{42}{1}\,k = -15 - 42\,k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2) Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer pgcd(153, 102) :

$$\begin{array}{rcl} 153 = 102 \cdot 1 + 51 & \Longrightarrow & 51 = 153 - 102 \cdot 1 \\ 102 = 51 \cdot 2 & & \end{array}$$

Ainsi $\mathrm{pgcd}(153, 102) = 51$.

On constate que 51 ne divise pas 413, car $413 = 51 \cdot 8 + 5$.
On en conclut que l'équation diophantienne $153\,x - 102\,y = 413$ n'admet aucune solution.

3) Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer pgcd(45, 27) :

$$\begin{array}{rcl} 45 = 27 \cdot 1 + 18 & \Longrightarrow & 18 = 45 - 27 \cdot 1 \\ 27 = 18 \cdot 1 + 9 & \Longrightarrow & 9 = 27 - 18 \cdot 1 \\ 18 = 9 \cdot 2 & & \end{array}$$

Ainsi $\mathrm{pgcd}(45, 27) = 9$.
Comme $9 \mid 117$, l'équation diophantienne admet une infinité de solutions.

Pour en déterminer une solution particulière, cherchons les entiers u et v tels que $45\,u + 27\,v = 9$:

$$\begin{aligned} 9 &= 27 - 18 \cdot 1 \\ &= 27 - (45 - 27 \cdot 1) \cdot 1 = 45 \cdot (-1) + 27 \cdot 2 \end{aligned}$$

En multipliant l'égalité $45 \cdot (-1) + 27 \cdot 2 = 9$ par 13, on trouve la solution particulière $45 \cdot \underbrace{(-13)}_{x_0} + 27 \cdot \underbrace{26}_{y_0} = 117$.

Finalement, la solution générale est donnée par :
$$\begin{cases} x = -13 + \frac{27}{9}\,k = -13 + 3\,k \\ y = 26 - \frac{45}{9}\,k = 26 - 5\,k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

En posant $k = k' + 5$, on peut simplifier l'écriture de la solution générale :
$$\begin{cases} x = -13 + 3\,(k' + 5) = 2 + 3\,k' \\ y = 26 - 5\,(k' + 5) = 1 - 5\,k' \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

4) Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer $\mathrm{pgcd}(120, 43)$:
$$\begin{array}{rcl} 120 = 43 \cdot 2 + 34 & \Longrightarrow & 34 = 120 - 43 \cdot 2 \\ 43 = 34 \cdot 1 + 9 & \Longrightarrow & 9 = 43 - 34 \cdot 1 \\ 34 = 9 \cdot 3 + 7 & \Longrightarrow & 7 = 34 - 9 \cdot 3 \\ 9 = 7 \cdot 1 + 2 & \Longrightarrow & 2 = 9 - 7 \cdot 1 \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 7 - 2 \cdot 3 \\ 2 = 1 \cdot 2 & & \end{array}$$

Ainsi $\mathrm{pgcd}(120, 43) = 1$.
Comme $1 \mid 12$, l'équation diophantienne admet une infinité de solutions.

Pour en déterminer une solution particulière, cherchons les entiers u et v tels que $120\,u + 43\,v = 1$:
$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 \\ &= 7 - (9 - 7 \cdot 1) \cdot 3 = 9 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 \\ &= 9 \cdot (-3) + (34 - 9 \cdot 3) \cdot 4 = 34 \cdot 4 + 9 \cdot (-15) \\ &= 34 \cdot 4 + (43 - 34 \cdot 1) \cdot (-15) = 43 \cdot (-15) + 34 \cdot 19 \\ &= 43 \cdot (-15) + (120 - 43 \cdot 2) \cdot 19 = 120 \cdot 19 + 43 \cdot (-53) \end{aligned}$$

En multipliant l'égalité $120 \cdot 19 + 43 \cdot (-53) = 1$ par 12, on trouve la solution particulière $120 \cdot \underbrace{228}_{x_0} + 27 \cdot \underbrace{(-636)}_{y_0} = 12$.

Finalement, la solution générale est donnée par :
$$\begin{cases} x = 228 + \frac{43}{1}\,k = 228 + 43\,k \\ y = -636 - \frac{120}{1}\,k = -636 - 120\,k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

En posant $k = k' - 5$, on peut simplifier l'écriture de la solution générale :
$$\begin{cases} x = 228 + 43\,(k' - 5) = 13 + 43\,k' \\ y = -636 - 120\,(k' - 5) = -36 - 120\,k' \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{Z})$$