3.18 Soient x le nombre de pièces de 1 franc et y le nombre de pièces de 50 centimes.

1) Puisque 1 dm = 100 mm, il s'agit de résoudre l'équation diophantienne $23\,x + 18\,y = 100$ avec $x, y \geqslant 0$.

   Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer pgcd(23, 18) :

$$\begin{array}{rlcl}
23 = & 18 \cdot 1 + 5 & \Longrightarrow & 5 = 23 - 18 \cdot 1 \\
18 = & 5 \cdot 3 + 3 & \Longrightarrow & 3 = 18 - 5 \cdot 3 \\
5 = & 3 \cdot 1 + 2 & \Longrightarrow & 2 = 5 - 3 \cdot 1 \\
3 = & 2 \cdot 1 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 3 - 2 \cdot 1 \\
2 = & 1 \cdot 2 & &
\end{array}$$

   Ainsi $\mathrm{pgcd}(23, 18) = 1$.

   Vu que $1 \mid 100$, l'équation diophantienne admet une infinité de solutions.

   Pour en déterminer une solution particulière, cherchons les entiers u et v tels que $23\,u + 18\,v = 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\
&= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\
&= 5 \cdot (-1) + (18 - 5 \cdot 3) \cdot 2 = 18 \cdot 2 + 5 \cdot (-7) \\
&= 18 \cdot 2 + (23 - 18 \cdot 1) \cdot (-7) = 23 \cdot (-7) + 18 \cdot 9
\end{aligned}$$

   En multipliant l'égalité $23 \cdot (-7) + 18 \cdot 9 = 1$ par 100, on trouve la solution particulière $23 \cdot (-700) + 18 \cdot 900 = 100$.

   La solution générale est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -700 + \frac{18}{1}\,k = -700 + 18\,k \\ y = 900 - \frac{23}{1}\,k = 900 - 23\,k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

   $x = -700 + 18\,k \geqslant 0$ implique $k \geqslant 39$, car $\frac{700}{18} \approx 38{,}89$
   $y = 900 - 23\,k \geqslant 0$ donne $k \leqslant 39$, car $\frac{900}{23} \approx 39{,}13$

   Par conséquent, il n'y a qu'une unique solution possible :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -700 + 18 \cdot 39 = 2 \\ y = 900 - 23 \cdot 39 = 3 \end{array}\right.$$

   Il faut ainsi aligner 2 pièces de 1 franc et 3 pièces de 50 centimes.

2) Comme 1 m = 1000 mm, il convient de résoudre l'équation diophantienne $23\,x + 18\,y = 1000$ avec $x, y \geqslant 0$.

   En reprenant les calculs précédents, on obtient une infinité de solutions :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -7000 + \frac{18}{1}\,k = -7000 + 18\,k \\ y = 9000 - \frac{23}{1}\,k = 9000 - 23\,k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

   $x = -700 + 18\,k \geqslant 0$ implique $k \geqslant 389$, car $\frac{7000}{18} \approx 388{,}89$
   $y = 900 - 23\,k \geqslant 0$ donne $k \leqslant 391$, car $\frac{900}{23} \approx 391{,}3$

Il y a donc trois possibilités :

(a) $k = 389$

$$\begin{cases} x = -7000 + 18 \cdot 389 = 2 \\ y = 9000 - 23 \cdot 389 = 53 \end{cases}$$

coût : $2 \cdot 1 + 53 \cdot 0{,}50 = 28{,}50$ francs

(b) $k = 390$

$$\begin{cases} x = -7000 + 18 \cdot 390 = 20 \\ y = 9000 - 23 \cdot 390 = 30 \end{cases}$$

coût : $20 \cdot 1 + 30 \cdot 0{,}50 = 35$ francs

(c) $k = 391$

$$\begin{cases} x = -7000 + 18 \cdot 391 = 38 \\ y = 9000 - 23 \cdot 391 = 7 \end{cases}$$

coût : $38 \cdot 1 + 7 \cdot 0{,}50 = 41{,}50$ francs

Pour obtenir la solution la plus économique, il faut par conséquent aligner 2 pièces de 1 franc et 53 pièces de 50 centimes.