3.19 Soient x le nombre de chèques de 20 € et y le nombre de chèques de 50 €.

Le problème revient à résoudre l'équation diophantienne $20\,x + 50\,y = 500$, ou plus simplement, $2\,x + 5\,y = 50$ avec $x, y \geqslant 0$.

Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(2, 5)$:

$5 = 2 \cdot 2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = 5 - 2 \cdot 2$

$2 = 1 \cdot 2$

Ainsi $\text{pgcd}(2, 5) = 1$.

Puisque $1 \mid 50$, l'équation diophantienne $2\,x + 5\,y = 50$ admet une infinité de solutions, dont une solution particulière est $2 \cdot (-100) + 5 \cdot 50 = 50$.

La solution générale est donnée par :

$$\begin{cases} x = -100 + \frac{5}{1}\,k = -100 + 5\,k \\ y = 50 - \frac{2}{1}\,k = 50 - 2\,k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$x = -100 + 5\,k \geqslant 0$ implique $k \geqslant 20$

$y = 50 - 2\,k \geqslant 0$ entraîne $k \leqslant 25$

Il y a dès lors 6 possibilités :

1) $k = 20$

$$\begin{cases} x = -100 + 5 \cdot 20 = 0 \\ y = 50 - 2 \cdot 20 = 10 \end{cases}$$

10 chèques de 50 €

2) $k = 21$

$$\begin{cases} x = -100 + 5 \cdot 21 = 5 \\ y = 50 - 2 \cdot 21 = 8 \end{cases}$$

5 chèques de 20 € et 8 chèques de 50 €

3) $k = 22$

$$\begin{cases} x = -100 + 5 \cdot 22 = 10 \\ y = 50 - 2 \cdot 22 = 6 \end{cases}$$

10 chèques de 20 € et 6 chèques de 50 €

4) $k = 23$

$$\begin{cases} x = -100 + 5 \cdot 23 = 15 \\ y = 50 - 2 \cdot 23 = 4 \end{cases}$$

15 chèques de 20 € et 4 chèques de 50 €

5) $k = 24$

$$\begin{cases} x = -100 + 5 \cdot 24 = 20 \\ y = 50 - 2 \cdot 24 = 2 \end{cases}$$

20 chèques de 20 € et 2 chèques de 50 €

6) $k = 25$

$$\begin{cases} x = -100 + 5 \cdot 25 = 25 \\ y = 50 - 2 \cdot 25 = 0 \end{cases}$$

25 chèques de 20 €