

3.2 Soient $a, b, k \in \mathbb{Z}$.

1) Montrons que $D(a, b) \subset D(a - kb, b)$.

Soit $d \in D(a, b)$ un diviseur commun à a et b .

Au vu de l'exercice 1.1 6), l'hypothèse $d \mid a$ et $d \mid b$ implique que $d \mid (ma + nb)$ quels que soient les entiers m et n .

En choisissant $m = 1$ et $n = -k$, on obtient que $d \mid (1 \cdot a + (-k)b)$, c'est-à-dire $d \mid (a - kb)$.

Ainsi d est un diviseur de $a - kb$ et de b , ce qui signifie que $d \in D(a - kb, b)$.

2) Montrons que $D(a - kb, b) \subset D(a, b)$.

Soit $d \in D(a - kb, b)$ un diviseur commun à $a - kb$ et b .

Toujours d'après l'exercice 1.1 6), l'hypothèse $d \mid (a - kb)$ et $d \mid b$ entraîne que $d \mid (m(a - kb) + nb)$ quels que soient les entiers m et n .

En particulier, lorsque $m = 1$ et $n = k$, on a $d \mid (1 \cdot (a - kb) + kb)$ ou encore $d \mid a$.

En d'autres termes, d est un diviseur de a et de b , de sorte que $d \in D(a, b)$.