**3.20** Soient $x$ le nombre d'hommes et $y$ le nombre de femmes.

Le problème revient à résoudre l'équation diophantienne $19\,x + 13\,y = 1000$ avec $0 \leqslant y < x$.

Appliquons l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(19, 13)$ :

$$\begin{array}{rcl} 19 = 13 \cdot 1 + 6 & \Longrightarrow & 6 = 19 - 13 \cdot 1 \\ 13 = 6 \cdot 2 + 1 & \Longrightarrow & 1 = 13 - 6 \cdot 2 \\ 6 = 1 \cdot 6 & & \end{array}$$

Ainsi $\text{pgcd}(19, 13) = 1$.

Vu que $1 \mid 1000$, l'équation diophantienne $19\,x + 13\,y = 1000$ admet une infinité de solutions.

Pour en déterminer une solution particulière, cherchons les entiers $u$ et $v$ tels que $19\,u + 13\,v = 1$ :

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 6 \cdot 2 \\ &= 13 - (19 - 13 \cdot 1) \cdot 2 = 19 \cdot (-2) + 13 \cdot 3 \end{aligned}$$

En multipliant l'égalité $19 \cdot (-2) + 13 \cdot 3 = 1$ par 1000, on obtient la solution particulière $19 \cdot (-2000) + 13 \cdot 3000 = 1000$.

La solution générale est donnée par :

$$\begin{cases} x = -2000 + \frac{13}{1}\,k = -2000 + 13\,k \\ y = 3000 - \frac{19}{1}\,k = 3000 - 19\,k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$0 \leqslant y = 3000 - 19\,k$ implique $k \leqslant 157$, vu que $\frac{3000}{19} \approx 157{,}89$

$y < x$ donne $3000 - 19\,k < -2000 + 13\,k$, d'où suit $5000 < 32\,k$.

Il en résulte $k > \frac{5000}{32} = 156{,}25$.

Il n'y a en définitive qu'une unique solution :

$$\begin{cases} x = -2000 + 13 \cdot 157 = 41 \\ y = 3000 - 19 \cdot 157 = 17 \end{cases}$$

En résumé, 41 hommes et 17 femmes ont mangé à l'auberge ce jour-là.