10 Primitives

Soit f une fonction. On appelle **primitive** de f toute fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

10.1 Soit f une fonction.

1) Montrer que si F est une primitive de f, alors $F + c$ est aussi une primitive de f quel que soit $c \in \mathbb{R}$.
2) Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F_2 = F_1 + c$.

On note $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$ une primitive quelconque de f.

10.2 Soient f et g deux fonctions, F une primitive de f, G une primitive de g et λ un nombre réel.

1) Calculer $\big(F(x) + G(x)\big)'$.

   En déduire la formule $\boxed{\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$.
2) Calculer $\big(\lambda\,F(x)\big)'$.

   En déduire la formule $\boxed{\displaystyle\int \lambda\,f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx}$.

10.3

1) Calculer $(x^{n+1})'$.

   En déduire la formule $\boxed{\displaystyle\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}}$.
2) Pour quelles valeurs de n cette formule est-elle valable ?

10.4 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int x^2\,dx$
2) $\displaystyle\int x^3\,dx$
3) $\displaystyle\int 7\,x^4\,dx$
4) $\displaystyle\int 5\,x\,dx$
5) $\displaystyle\int 3\,dx$
6) $\displaystyle\int (2\,x - 1)\,dx$
7) $\displaystyle\int (3\,x^2 + 5\,x - 1)\,dx$
8) $\displaystyle\int (-7\,x^4 + 3\,x^3 - x^2 + 2\,x - 1)\,dx$
9) $\displaystyle\int (3\,x^5 - 4\,x^4 + x^3 - 2)\,dx$
10) $\displaystyle\int (\tfrac{1}{5}\,x^4 + \tfrac{3}{2}\,x^3)\,dx$

11) $\displaystyle\int(-\tfrac{1}{3}\,x^2+\tfrac{2}{5}\,x-\tfrac{1}{4})\,dx$ 12) $\displaystyle\int(\tfrac{5}{3}\,x^4-\tfrac{3}{4}\,x^2+1)\,dx$

10.5 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int\frac{2}{x^3}\,dx$

3) $\displaystyle\int-\frac{7}{x^5}\,dx$ 4) $\displaystyle\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

5) $\displaystyle\int\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}\right)\,dx$ 6) $\displaystyle\int\left(-\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}\right)\,dx$

7) $\displaystyle\int\sqrt{x}\,dx$ 8) $\displaystyle\int\sqrt[3]{x}\,dx$

9) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 10) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

11) $\displaystyle\int x\,\sqrt{x}\,dx$ 12) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

13) $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\,dx$ 14) $\displaystyle\int\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)\,dx$

10.6 1) Calculer $\big(f^{n+1}(x)\big)'$.

En déduire la formule $\boxed{\displaystyle\int f^n(x)\cdot f'(x)\,dx=\tfrac{1}{n+1}\,f^{n+1}(x)}$.

2) Pour quelles valeurs de n cette formule est-elle valable ?

10.7 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int(x+3)^3\,dx$ 2) $\displaystyle\int(2\,x-1)^2\,dx$

3) $\displaystyle\int(7\,x-2)^5\,dx$ 4) $\displaystyle\int(3\,x+2)^6\,dx$

5) $\displaystyle\int(3\,x^2+x)^3\,(6\,x+1)\,dx$ 6) $\displaystyle\int(4\,x^2-5\,x)^2\,(16\,x-10)\,dx$

7) $\displaystyle\int x\,(4\,x^2+3)^4\,dx$ 8) $\displaystyle\int(x^2+2\,x)\,(x^3+3\,x^2-5)^2\,dx$

9) $\displaystyle\int\frac{2\,x+1}{(x^2+x+3)^2}\,dx$ 10) $\displaystyle\int\frac{3\,x^2}{(1+2\,x^3)^2}\,dx$

11) $\displaystyle\int(3\,x^2+1)\,\sqrt{x^3+x+2}\,dx$ 12) $\displaystyle\int(2\,x-5)\,\sqrt{x^2-5\,x+6}\,dx$

13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3\,x+1}}\,dx$ 14) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2\,x}}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2}{\sqrt{9+x^3}}\,dx$ 16) $\displaystyle\int \frac{3\,x^2}{\sqrt{5\,x^3+8}}\,dx$

17) $\displaystyle\int \cos(x)\,\sqrt{\sin(x)}\,dx$ 18) $\displaystyle\int \sin(x)\,\cos^4(x)\,dx$

19) $\displaystyle\int \cos^2\big(\tfrac{x}{2}\big)\,\sin\big(\tfrac{x}{2}\big)\,dx$ 20) $\displaystyle\int \cos(x)-\sin^2(x)\,\cos(x)\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\big(1+\cos(x)\big)^2}\,dx$ 22) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\big(4\,\sin(x)-1\big)^3}\,dx$

10.8

1) Soit $\mathrm{F}_1(x)=\ln(x)$. Déterminer $\mathrm{D}_{\mathrm{F}_1}$ et calculer $\mathrm{F}_1'(x)$.
2) Soit $\mathrm{F}_2(x)=\ln(-x)$. Déterminer $\mathrm{D}_{\mathrm{F}_2}$ et calculer $\mathrm{F}_2'(x)$.
3) En déduire la formule $\boxed{\displaystyle\int x^{-1}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\big(|x|\big)}$.

10.9 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{3}{2\,x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\ln\big(|x|\big)\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{\ln^3\big(|x|\big)}{x}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,\ln^2\big(|x|\big)}\,dx$

10.10 Soient f et g des fonctions et G une primitive de g.

1) Calculer $\Big(\mathrm{G}\big(f(x)\big)\Big)'$.

   En déduire la formule $\displaystyle\int g\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\,dx=\mathrm{G}\big(f(x)\big)$.
2) Quelles formules obtient-on lorsque
   (a) $g(x)=\frac{1}{x}$
   (b) $g(x)=e^x$
   (c) $g(x)=\sin(x)$
   (d) $g(x)=\cos(x)$

10.11 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{1}{2\,x-5}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{3\,x+1}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{1-2\,x}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-2\,x+4}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{3\,x}{x^2+1}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{4\,x+2}{x^2+x+1}\,dx$

7) $\displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \cot(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$

9) $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$ 10) $\displaystyle\int 2\,e^{3x}\,dx$

11) $\displaystyle\int e^{2x+1}\,dx$ 12) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx$

13) $\displaystyle\int \sin(3\,x)\,dx$ 14) $\displaystyle\int \frac{\cos(4\,x)}{2}\,dx$

15) $\displaystyle\int \big(\sin(5\,x) - 6\,\cos(3\,x+1)\big)\,dx$ 16) $\displaystyle\int x\,\cos(x^2)\,dx$

10.12 Effectuer la division polynomiale, puis calculer les primitives des fonctions suivantes :

1) $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x+1}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{6\,x^2-4\,x+2}{3\,x+4}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x-1}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{x\,(x^2-9)}{x^2-1}\,dx$

Décomposition en fractions simples

Quitte à effectuer une division polynomiale, toute fonction rationnelle $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}$ peut s'écrire $\mathrm{Q}(x) + \dfrac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{D}(x)}$ avec $\deg\big(\mathrm{R}(x)\big) < \deg\big(\mathrm{D}(x)\big)$.

Le dénominateur $\mathrm{D}(x)$ peut se factoriser en facteurs linéaires $a\,x+b$ ou quadratiques indécomposables $a\,x^2+b\,x+c$ (avec $b^2-4\,a\,c<0$).

La fraction $\dfrac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{D}(x)}$ se décompose en une somme de fractions simples de la manière suivante :

1) à tout facteur linéaire $(a\,x+b)^n$ correspond une somme de fractions simples du type :
$$\frac{\mathrm{A}_1}{a\,x+b} + \frac{\mathrm{A}_2}{(a\,x+b)^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{(a\,x+b)^3} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n}{(a\,x+b)^n}$$
avec $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_n$ des nombres réels ;

2) à tout facteur quadratique indécomposable $(a\,x^2+b\,x+c)^n$ correspond une somme de fractions simples du type :
$$\frac{\mathrm{A}_1\,x+\mathrm{B}_1}{a\,x^2+b\,x+c} + \frac{\mathrm{A}_2\,x+\mathrm{B}_2}{(a\,x^2+b\,x+c)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n\,x+\mathrm{B}_n}{(a\,x^2+b\,x+c)^n}$$
avec $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n$ des nombres réels.

Exemple $\dfrac{x^2-2\,x+6}{x^2-x-2} = 1 + \dfrac{-x+8}{x^2-x-2} = 1 + \dfrac{-x+8}{(x-2)\,(x+1)}$

$$\frac{-x+8}{(x-2)\,(x+1)} = \frac{\mathrm{A}}{x-2} + \frac{\mathrm{B}}{x+1} = \frac{\mathrm{A}\,(x+1)+\mathrm{B}\,(x-2)}{(x-2)\,(x+1)} = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,x+(\mathrm{A}-2\,\mathrm{B})}{(x-2)\,(x+1)}$$

$$\begin{cases} \mathrm{A} + \ \ \mathrm{B} = -1 \\ \mathrm{A} - 2\,\mathrm{B} = \ \ 8 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{A} = \ \ 2 \\ \mathrm{B} = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-2\,x+6}{x^2-x-2} = 1 + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+1}$$

10.13 Calculer les primitives suivantes, après avoir décomposé en sommes de fractions simples :

1) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(x-1)\,(x-2)}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{2\,x^2+x-2}{x^2\,(x+2)}\,dx$ 4) $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2-4\,x}{x^2-4\,x+3}\,dx$ 6) $\displaystyle\int \frac{8\,x-8}{x^3-4\,x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{2-3\,x}{x^2-3\,x+2}\,dx$ 8) $\displaystyle\int \frac{x^2-4\,x-1}{x^3-x}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{3\,x+1}{x\,(x-1)^3}\,dx$ 10) $\displaystyle\int \frac{4\,x}{x^4-1}\,dx$

Intégration par parties

10.14 Soient f et g deux fonctions dérivables.
Calculer $\big(f(x)\,g(x)\big)'$ et en déduire la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx}\,.$$

Exemple $\displaystyle\int x\,\cos(x)\,dx = x\,\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\,\sin(x) + \cos(x) + c$
avec $f'(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x$, de sorte que $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = 1$.

Remarque : on choisit généralement pour $f'(x)$ la partie la plus compliquée de l'expression dont on sait trouver une primitive.

10.15 Calculer les primitives suivantes :

1) $\displaystyle\int x\,\sin(2\,x)\,dx$ 2) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

3) $\displaystyle\int 3\,x^2\,e^{3x}\,dx$ 4) $\displaystyle\int (x^2+1)\,\cos(x)\,dx$

5) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$ 6) $\displaystyle\int x\,\sqrt{x+1}\,dx$

7) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx$ 8) $\displaystyle\int e^x\,\cos(x)\,dx$

9) $\displaystyle\int x\,\ln(x)\,dx$ 10) $\displaystyle\int x^2\,e^{-x}\,dx$

Intégration par changement de variable

Soient g une fonction et G une primitive de g.
Si l'on effectue le changement de variable $x = f(t)$, l'exercice 10.10 implique :

$$\int g(x)\,dx = \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}\big(f(t)\big) = \int g\big(f(t)\big)\cdot f'(t)\,dt$$

Exemple Calculons $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ avec le changement de variable $x = t^2-1$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{t^2-1}{\sqrt{(t^2-1)+1}}\cdot(t^2-1)'\,dt = \int \frac{t^2-1}{t}\cdot 2\,t\,dt = \int (2\,t^2-2)\,dt$$

$$= \tfrac{2}{3}\,t^3 - 2\,t = \tfrac{2}{3}\,t\,(t^2-3)$$

De la formule du changement de variable $x = t^2-1$, on tire que $t = \sqrt{x+1}$.
Ainsi $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \tfrac{2}{3}\,\sqrt{x+1}\,\big((\sqrt{x+1})^2-3\big) = \tfrac{2}{3}\,\sqrt{x+1}\,(x-2)+c$

10.16 Calculer les primitives suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1) $\displaystyle\int x\,\sqrt{x+2}\,dx$ $\quad x = t^2-2$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $\quad x = (t-1)^2$

3) $\displaystyle\int \frac{2\,x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ $\quad x = t^2-1$

4) $\displaystyle\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}\,dx$ $\quad x = \tan(t)$

5) $\displaystyle\int \frac{1}{2\,x^2-2\,x+1}\,dx$ $\quad x = \tfrac{1}{2}\,(t+1)$

6) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\quad x = \sin(t)$

Indications : $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\,\alpha)}{2}$ $\quad \sin(2\,\alpha) = 2\,\sin(\alpha)\,\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$

Réponses

10.3 2) $n \neq -1$

10.4

1) $\frac{1}{3}\,x^3 + c$
2) $\frac{1}{4}\,x^4 + c$
3) $\frac{7}{5}\,x^5 + c$
4) $\frac{5}{2}\,x^2 + c$
5) $3\,x + c$
6) $x^2 - x + c$
7) $x^3 + \frac{5}{2}\,x^2 - x + c$
8) $-\frac{7}{5}\,x^5 + \frac{3}{4}\,x^4 - \frac{1}{3}\,x^3 + x^2 - x + c$
9) $\frac{1}{2}\,x^6 - \frac{4}{5}\,x^5 + \frac{1}{4}\,x^4 - 2\,x + c$
10) $\frac{1}{25}\,x^5 + \frac{3}{8}\,x^4 + c$
11) $-\frac{1}{9}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x + c$
12) $\frac{1}{3}\,x^5 - \frac{1}{4}\,x^3 + x + c$

10.5

1) $-\dfrac{1}{x} + c$
2) $-\dfrac{1}{x^2} + c$
3) $\dfrac{7}{4\,x^4} + c$
4) $x - \dfrac{1}{x} + c$
5) $4\,x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{3\,x^3} + c$
6) $\dfrac{4}{3\,x^3} + \dfrac{1}{2\,x^2} - \dfrac{3}{4\,x^4} + c$
7) $\frac{2}{3}\,x\,\sqrt{x} + c$
8) $\frac{3}{4}\,x\,\sqrt[3]{x} + c$
9) $2\,\sqrt{x} + c$
10) $3\,\sqrt[3]{x} + c$
11) $\frac{2}{5}\,x^2\,\sqrt{x} + c$
12) $\frac{2}{3}\,x\,\sqrt{x} - 2\,\sqrt{x} + c$
13) $\frac{3}{4}\,x\,\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\,\sqrt[3]{x^2} + c$
14) $-3\,\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + c$

10.6 2) $n \neq -1$

10.7

1) $\frac{1}{4}\,(x+3)^4 + c$
2) $\frac{1}{6}\,(2\,x-1)^3 + c$
3) $\frac{1}{42}\,(7\,x-2)^6 + c$
4) $\frac{1}{21}\,(3\,x+2)^7 + c$
5) $\frac{1}{4}\,(3\,x^2+x)^4 + c$
6) $\frac{2}{3}\,(4\,x^2-5\,x)^3 + c$
7) $\frac{1}{40}\,(4\,x^2+3)^5 + c$
8) $\frac{1}{9}\,(x^3+3\,x^2-5)^3 + c$
9) $-\dfrac{1}{x^2+x+3} + c$
10) $-\dfrac{1}{2\,(1+2\,x^3)} + c$
11) $\frac{2}{3}\,(x^3+x+2)\,\sqrt{x^3+x+2} + c$
12) $\frac{2}{3}\,(x^2-5\,x+6)\,\sqrt{x^2-5\,x+6} + c$
13) $\frac{2}{3}\,\sqrt{3\,x+1} + c$
14) $\sqrt{x^2+2\,x} + c$
15) $2\,\sqrt{9+x^3} + c$
16) $\frac{2}{5}\,\sqrt{5\,x^3+8} + c$
17) $\frac{2}{3}\,\sin(x)\,\sqrt{\sin(x)} + c$
18) $-\frac{1}{5}\,\cos^5(x) + c$
19) $-\frac{2}{3}\,\cos^3\!\left(\frac{x}{2}\right) + c$
20) $\sin(x) - \frac{1}{3}\,\sin^3(x) + c$

21) $\dfrac{1}{1+\cos(x)}+c$ 22) $-\dfrac{1}{8\left(4\,\sin(x)-1\right)^2}+c$

10.9 1) $\frac{3}{2}\,\ln\big(|x|\big)+c$ 2) $\frac{1}{2}\,\ln^2\big(|x|\big)+c$

3) $\frac{1}{4}\,\ln^4\big(|x|\big)+c$ 4) $-\dfrac{1}{\ln\big(|x|\big)}+c$

10.10 2) (a) $\boxed{\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln\Big(\big|f(x)\big|\Big)}$

(b) $\boxed{\displaystyle\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=e^{f(x)}}$

(c) $\boxed{\displaystyle\int\sin\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\,dx=-\cos\big(f(x)\big)}$

(d) $\boxed{\displaystyle\int\cos\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\,dx=\sin\big(f(x)\big)}$

10.11 1) $\frac{1}{2}\,\ln\big(|2\,x-5|\big)+c$ 2) $\frac{1}{3}\,\ln\big(|3\,x+1|\big)+c$

3) $-\frac{1}{2}\,\ln\big(|1-2\,x|\big)+c$ 4) $\frac{1}{2}\,\ln(x^2-2\,x+4)+c$

5) $\frac{3}{2}\,\ln(x^2+1)+c$ 6) $2\,\ln(x^2+x+1)+c$

7) $-\ln\Big(\big|\cos(x)\big|\Big)+c$ 8) $\ln\Big(\big|\sin(x)\big|\Big)+c$

9) $\frac{1}{5}\,e^{5x}+c$ 10) $\frac{2}{3}\,e^{3x}+c$

11) $\frac{1}{2}\,e^{2x+1}+c$ 12) $-\frac{1}{3}\,e^{-3x}+c$

13) $-\frac{1}{3}\,\cos(3\,x)+c$ 14) $\frac{1}{8}\,\sin(4\,x)+c$

15) $-\frac{1}{5}\,\cos(5\,x)-2\,\sin(3\,x+1)+c$ 16) $\frac{1}{2}\,\sin(x^2)+c$

10.12 1) $\frac{1}{2}\,x^2-2\,x+2\ln\big(|x+1|\big)+c$ 2) $x^2-4\,x+6\ln\big(|3\,x+4|\big)+c$

3) $\frac{1}{2}\,x^2+3\,x+4\ln\big(|x-1|\big)+c$ 4) $\frac{1}{2}\,x^2-4\,\ln\big(|x^2-1|\big)+c$

10.13 1) $\displaystyle\int\Big(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\Big)\,dx=\ln\big(|x-2|\big)-\frac{2}{x-2}+c$

2) $\displaystyle\int\Big(\frac{1}{2\,x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2\,(x-2)}\Big)\,dx=\tfrac{1}{2}\,\ln\big(|x|\big)-\ln\big(|x-1|\big)+\tfrac{1}{2}\,\ln\big(|x-2|\big)+c$

3) $\displaystyle\int\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+2}\Big)\,dx=\ln\big(|x|\big)+\frac{1}{x}+\ln\big(|x+2|\big)+c$

4) $\displaystyle\int\Big(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}\Big)\,dx=3\,\ln\big(|x-2|\big)-2\,\ln\big(|x+1|\big)+c$

5) $\displaystyle\int\Big(1+\frac{3}{2\,(x-1)}-\frac{3}{2\,(x-3)}\Big)\,dx = x+\tfrac{3}{2}\,\ln\big(|x-1|\big)-\tfrac{3}{2}\,\ln\big(|x-3|\big)+c$

6) $\displaystyle\int\Big(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x+2}\Big)\,dx = 2\,\ln\big(|x|\big)+\ln\big(|x-2|\big)-3\,\ln\big(|x+2|\big)+c$

7) $\displaystyle\int\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}\Big)\,dx = \ln\big(|x-1|\big)-4\,\ln\big(|x-2|\big)+c$

8) $\displaystyle\int\Big(\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}\Big)\,dx = \ln\big(|x|\big)-2\,\ln\big(|x-1|\big)+2\,\ln\big(|x+1|\big)+c$

9) $\displaystyle\int\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}\Big)\,dx =$
$\displaystyle-\ln\big(|x|\big)+\ln\big(|x-1|\big)+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+c$

10) $\displaystyle\int\Big(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2\,x}{x^2+1}\Big)\,dx = \ln\big(|x-1|\big)+\ln\big(|x+1|\big)-\ln(x^2+1)+c$

10.15

1) $-\frac{1}{2}\,x\,\cos(2\,x)+\frac{1}{4}\,\sin(2\,x)+c$

2) $(x-1)\,e^x+c$

3) $\frac{1}{9}\,(9\,x^2-6\,x+2)\,e^{3x}+c$

4) $(x^2-1)\,\sin(x)+2\,x\,\cos(x)+c$

5) $x\,\big(\ln(x)-1\big)+c$

6) $\frac{2}{15}\,(3\,x-2)\,(x+1)\,\sqrt{x+1}+c$

7) $x\,\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+c$

8) $\frac{1}{2}\,e^x\,\big(\sin(x)+\cos(x)\big)+c$

9) $\frac{1}{4}\,x^2\,\big(2\,\ln(x)-1\big)+c$

10) $-(x^2+2\,x+2)\,e^{-x}+c$

10.16

1) $\frac{2}{15}\,(x+2)\,\sqrt{x+2}\,(3\,x-4)+c$

2) $x-2\,\sqrt{x}-3+2\,\ln(1+\sqrt{x})+c$

3) $\frac{2}{3}\,\sqrt{x+1}\,(2\,x-1)+c$

4) $\frac{1}{3}\,\arctan^3(x)+c$

5) $\arctan(2\,x-1)+c$

6) $\frac{1}{2}\,\arcsin(x)+\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2}+c$