# 4 Problèmes métriques dans l'espace

### Angles

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. On rappelle que l'angle $\varphi$ entre ces deux vecteurs s'obtient à l'aide des formules

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin(\varphi) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}}$$

démontrées en première année aux exercices 12.3 et 13.9.

**4.1** Calculer l'angle aigu entre les droites $d_1$ et $d_2$ :

1) $(d_1) : \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (d_2) : \begin{cases} x = -1 + 3\mu \\ y = -3 + \mu \\ z = 4 + \mu \end{cases},\quad \mu \in \mathbb{R}$

2) $(d_1) : \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 6 - 3\lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (d_2) : \begin{cases} x = \phantom{-2} + \mu \\ y = -2 - 2\mu \\ z = 4 + \mu \end{cases},\quad \mu \in \mathbb{R}$

**4.2** Calculer l'angle aigu entre les plans $\pi_1$ et $\pi_2$ :

1) $(\pi_1) : x + 2\,y - z = 0$ $\qquad (\pi_2) : 2\,x - 3\,y + 4\,z - 8 = 0$

2) $(\pi_1) : x - y + 2\,z - 3 = 0$ $\qquad (\pi_2) : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda - 2\mu \\ z = 1 - \lambda + 3\mu \end{cases},\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

3) $\pi_1$ passe par l'origine et les points $A(1\,;2\,;3)$ et $B(5\,;4\,;6)$ ;
$\pi_2$ passe par l'origine et les points $C(5\,;2\,;3)$ et $D(1\,;5\,;-4)$.

**4.3** Calculer l'angle aigu que fait la droite $d$ avec le plan $\pi$ :

1) $(d) : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad (\pi) : 2\,x + 3\,y + 4\,z = 0$

2) $(d) : x - 1 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ $\qquad (\pi) : 3\,x + 2\,y - 5\,z = 0$

**4.4** Déterminer les équations cartésiennes des plans qui passent par les points $A(4\,;2\,;1)$ et $B(2\,;1\,;-1)$ et qui forment un angle de $45^\circ$ avec le plan d'équation $x - 4\,y + z - 8 = 0$.

**4.5** Un rayon lumineux issu de $P(3\,;-2\,;1)$ rencontre le miroir plan d'équation $x + y = 0$. Ce rayon est réfléchi et passe par $Q(2\,;5\,;1)$.

1) Quel est le point où le rayon rencontre le miroir ?
2) Quel est l'angle formé par le rayon et le miroir ?

### Distance d'un point à un plan

**4.6** Soient un point $\mathrm{P}(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et un plan $\pi$ d'équation $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$. Généraliser l'exercice 2.15 pour démontrer que la distance du point P au plan $\pi$ est donnée par la formule

$$\boxed{\delta(\mathrm{P}\,;\pi)=\frac{|\,a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

**4.7** Calculer la distance du point P au plan $\pi$ :

1) $\mathrm{P}(-8\,;7\,;0)$ $\quad(\pi):2\,x-2\,y+z+6=0$

2) $\mathrm{P}(15\,;-2\,;5)$ $\quad(\pi):3\,x-2\,y+z-12=0$

3) $\mathrm{P}(2\,;-3\,;5)$ $\quad(\pi):\begin{cases}x=-11+12\,\lambda+\mu\\ y=4-6\,\lambda\\ z=-4-5\,\lambda+\mu\end{cases},\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

**4.8** Calculer les longueurs des hauteurs du tétraèdre de sommets $\mathrm{A}(2\,;4\,;6)$, $\mathrm{B}(-4\,;-4\,;4)$, $\mathrm{C}(5\,;0\,;3)$ et $\mathrm{D}(-1\,;7\,;5)$.

**4.9**
1) Vérifier que les plans $3\,x+12\,y-4\,z-18=0$ et $3\,x+12\,y-4\,z+73=0$ sont parallèles et calculer leur distance.
2) Déterminer les équations des plans situés à une distance de 6 du plan d'équation $9\,x+2\,y-6\,z-8=0$.

### Plans bissecteurs

On considère deux plans d'équations respectives $(\pi_1):a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0$ et $(\pi_2):a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0$. Les plans bissecteurs constituent le lieu géométrique des points équidistants des plans $\pi_1$ et $\pi_2$. Aussi leurs équations sont-elles fournies par la formule

$$\boxed{\frac{a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

**4.10** Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs des plans $\pi_1$ et $\pi_2$ :

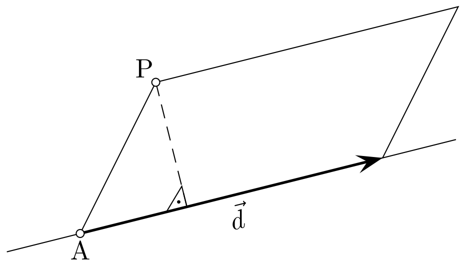
1) $(\pi_1):x+2\,y-2\,z-1=0$ $\quad(\pi_2):2\,x-y+2\,z+1=0$

2) $(\pi_1):3\,x+y-z+25=0$ $\quad(\pi_2):x-7\,y-7\,z+13=0$

3) $(\pi_1):z+2=0$ $\quad(\pi_2):3\,x-2\,y+6\,z-20=0$

**4.11** Calculer les coordonnées des points de la droite $(d):\begin{cases}x=5+3\,\lambda\\ y=13+7\,\lambda\\ z=7+5\,\lambda\end{cases},\quad\lambda\in\mathbb{R}$
qui sont équidistants des plans d'équations respectives $(\pi_1):6\,x-y-2\,z+3=0$ et $(\pi_2):3\,x+4\,y-4\,z-9=0$.

### Distance d'un point à une droite




On considère un point P, ainsi qu'une droite $d$ passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.
L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{d}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ vaut $\|\vec{d}\| \cdot \delta(\mathrm{P}\,;d)$.
Mais on sait aussi, grâce à l'exercice 13.9 de première année, que l'aire de ce parallélogramme est donnée par $\|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \times \vec{d}\|$. L'égalité $\|\vec{d}\| \cdot \delta(\mathrm{P}\,;d) = \|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \times \vec{d}\|$ implique que la distance du point P à la droite $d$ s'obtient par la formule

$$\boxed{\delta(\mathrm{P}\,;d) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{AP}} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}}$$

**4.12** Calculer la distance du point P à la droite $d$ :

1) $\mathrm{P}(3\,;5\,;10)$ $\qquad (d) : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+4}{-6} = z - 5$

2) $\mathrm{P}(-5\,;4\,;-2)$ $\qquad (d) : \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\mathrm{P}(5\,;-2\,;1)$ $\qquad (d) : \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 8 + 6\lambda \\ z = 16 + 2\lambda \end{cases},\quad \lambda \in \mathbb{R}$

**4.13** On donne les points $\mathrm{A}(10\,;8\,;-8)$, $\mathrm{B}(9\,;4\,;-7)$, $\mathrm{C}(0\,;4\,;2)$ et $\mathrm{D}(4\,;-8\,;-6)$. Soient $g$ la droite AB et $p$ la parallèle à AB passant par C. Déterminer les coordonnées du point M le plus proche de D et équidistant des deux droites $g$ et $p$.

**4.14** Vérifier que les droites $(d_1) : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 4 - \mu \\ z = 2 - 3\mu \end{cases}$ sont concourantes en un point P et déterminer des représentations paramétriques de leurs bissectrices.

**4.15** On considère les points $\mathrm{A}(5\,;-1\,;-1)$, $\mathrm{B}(3\,;-2\,;1)$ et $\mathrm{C}(1\,;1\,;7)$. Déterminer une équation paramétrique de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet B.

## Réponses

**4.1** 1) $70,71^\circ$ 2) $83,74^\circ$

**4.2** 1) $52,66^\circ$ 2) $82,07^\circ$ 3) $80,79^\circ$

**4.3** 1) $30,57^\circ$ 2) $36,59^\circ$

**4.4** $2\,x-2\,y-z-3=0$ et $x+2\,y-2\,z-6=0$

**4.5** 1) $(2\,;-2\,;1)$ 2) $45^\circ$

**4.7** 1) $8$ 2) $3\,\sqrt{14}$ 3) $5$

**4.8** $h_{\mathrm{A}}=\frac{4\,\sqrt{2}}{3}$ $h_{\mathrm{B}}=\frac{12\,\sqrt{322}}{23}$ $h_{\mathrm{C}}=\frac{6\,\sqrt{10}}{5}$ $h_{\mathrm{D}}=3$

**4.9** 1) $7$ 2) $9\,x+2\,y-6\,z-74=0$
$9\,x+2\,y-6\,z+58=0$

**4.10** 1) $x-3\,y+4\,z+2=0$ $3\,x+y=0$
2) $4\,x+5\,y+2\,z+31=0$ $5\,x-2\,y-5\,z+44=0$
3) $3\,x-2\,y-z-34=0$ $3\,x-2\,y+13\,z-6=0$

**4.11** $(-1\,;-1\,;-3)$ et $(\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\,;-\frac{1}{2})$

**4.12** 1) $7$ 2) $\frac{5\,\sqrt{6}}{2}$ 3) $15$

**4.13** $\mathrm{M}(0\,;-6\,;-2)$

**4.14** $\mathrm{P}(2\,;3\,;-1)$

$$(b_1):\begin{cases} x = 2+3\,\lambda \\ y = 3+2\,\lambda \\ z = -1-\lambda \end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R} \qquad (b_2):\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+4\,\lambda \\ z = -1+5\,\lambda \end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

**4.15**
$$\begin{cases} x = 3+2\,\lambda \\ y = -2+4\,\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$