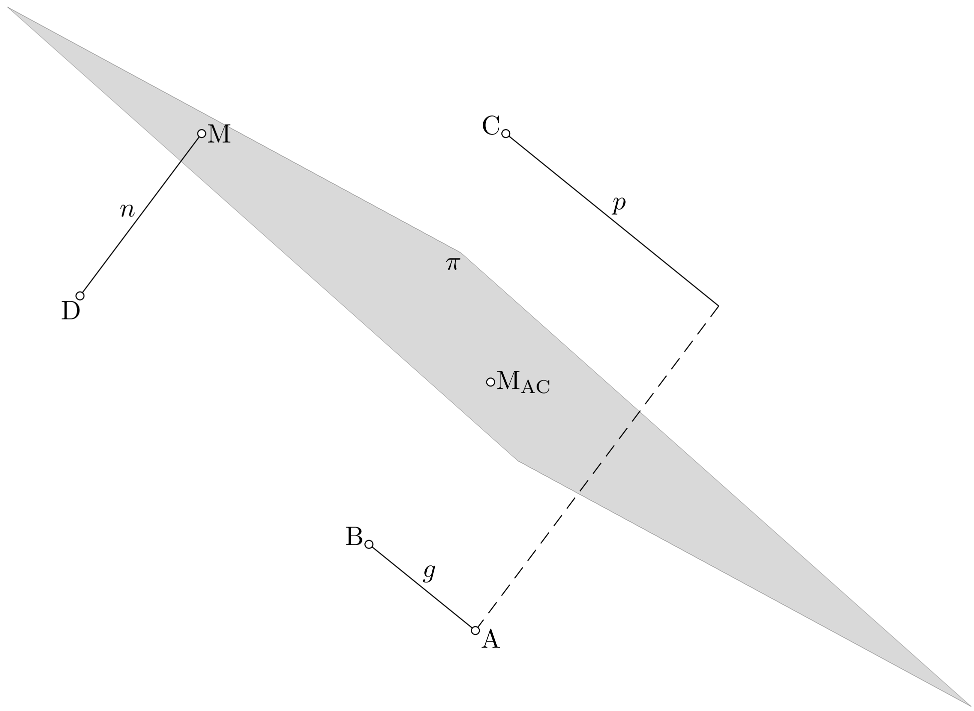
4.13



L'ensemble des points équidistants des deux droites g et p se situent sur le plan π qui est parallèle aux droites g et p, perpendiculaire au plan ABC, et passe par le milieu des points A et C.

Ce plan admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} = -36 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vu qu'il passe par le point milieu $\mathrm{M_{AC}}(\frac{10+0}{2}\,;\frac{8+4}{2}\,;\frac{-8+2}{2}) = \mathrm{M_{AC}}(5\,;6\,;-3)$, son équation paramétrique est $\begin{cases} x = 5 - \lambda + \mu \\ y = 6 - 4\,\lambda \\ z = -3 + \lambda + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Éliminons les paramètres pour obtenir l'équation cartésienne du plan π :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5 - \lambda + \mu \\ y = 6 - 4\,\lambda \\ z = -3 + \lambda + \mu \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \\ \cdot(-1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x - z = 8 - 2\,\lambda \\ y = 6 - 4\,\lambda \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \end{array}\right.$$

$2\,x - y - 2\,z = 10$

On a donc trouvé l'équation cartésienne $\boxed{(\pi) : 2\,x - y - 2\,z - 10 = 0}$.

Soit n la droite normale au plan π qui passe par le point D.

Son équation paramétrique est $(n) : \begin{cases} x = 4 + 2\,\lambda \\ y = -8 - \,\lambda \\ z = -6 - 2\,\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$

Le point M que l'on recherche n'est autre que l'intersection de la droite n avec le plan π :

$2\,(4 + 2\,\lambda) - (-8 - \lambda) - 2\,(-6 - 2\,\lambda) - 10 = 0$

$8 + 4\,\lambda + 8 + \lambda + 12 + 4\,\lambda - 10 = 0$

$9\,\lambda + 18 = 0$

$\lambda = -2$

Les coordonnées du point M sont données par $\begin{cases} x = 4 + 2 \cdot (-2) = 0 \\ y = -8 - (-2) = -6 \\ z = -6 - 2 \cdot (-2) = -2 \end{cases}.$

On conclut que le point recherché est $\boxed{\mathrm{M}(0\,;-6\,;-2)}$.