

4.14 Vérifions que les droites d_1 et d_2 sont concourantes.

En égalant les coordonnées fournies par les équations paramétriques de ces droites, on obtient le système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2 + \lambda = 2\mu \\ 3 + 3\lambda = 4 - \mu \\ -1 + 2\lambda = 2 - 3\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda - 2\mu = -2 \\ 3\lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 3\mu = 3 \end{cases}$$

Résolvons le système formé par les deux premières équations de ce système.

La première équation donne $\lambda = 2\mu - 2$ que l'on remplace dans la deuxième équation : $3(2\mu - 2) + \mu = 1$, de sorte que $7\mu - 7 = 0$, c'est-à-dire $\mu = 1$.

Il en découle que $\lambda = 2 \cdot 1 - 2 = 0$.

Étant donné que les valeurs $\lambda = 0$ et $\mu = 1$ vérifient également la troisième équation $2\lambda + 3\mu = 3$, on conclut que les droites d_1 et d_2 sont bien concourantes.

Leur point d'intersection est donné par
$$\begin{cases} 2 + 0 = 2 \cdot 1 = 2 \\ 3 + 3 \cdot 0 = 4 - 1 = 3 \\ -1 + 2 \cdot 0 = 2 - 3 \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

On a ainsi trouvé le point $\boxed{P(2; 3; -1)}$.

1^{re} méthode

Les bissectrices des droites d_1 et d_2 sont contenues dans le plan π défini par les droites d_1 et d_2 . Ce plan passe par le point $P(2; 3; -1)$ et admet pour vecteurs

directeurs $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Son équation paramétrique est donc :

$$(\pi) : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 3 + 3\lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Un point Q de ce point appartient à l'une des bissectrices des droites d_1 et d_2 s'il est équidistant de ces droites, c'est-à-dire si $\delta(Q; d_1) = \delta(Q; d_2)$.

$$\begin{aligned} \delta(Q; d_1) &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 + \lambda + 2\mu - 2 \\ 3 + 3\lambda - \mu - 3 \\ -1 + 2\lambda - 3\mu - (-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ 3\lambda - \mu \\ 2\lambda - 3\mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}} \\ &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 7\mu \\ -7\mu \\ 7\mu \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}} = \frac{7|\mu| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}} = \frac{7|\mu| \sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{|\mu| \sqrt{42}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(Q; d_2) &= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 + \lambda + 2\mu - 2 \\ 3 + 3\lambda - \mu - 3 \\ -1 + 2\lambda - 3\mu - (-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu \\ 3\lambda - \mu \\ 2\lambda - 3\mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} \\
&= \frac{\left\| \begin{pmatrix} -7\lambda \\ 7\lambda \\ -7\lambda \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{7|\lambda| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{7|\lambda|\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{|\lambda|\sqrt{42}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité $\delta(Q; d_1) = \delta(Q; d_2)$ implique $|\lambda| = |\mu|$ ou encore $\lambda = \pm\mu$.

1) En introduisant l'égalité $\lambda = \mu$ dans l'équation paramétrique du plan π ,

$$\text{on obtient : } \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\lambda = 2 + 3\lambda \\ y = 3 + 3\lambda - \lambda = 3 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2\lambda - 3\lambda = -1 - \lambda \end{cases}$$

2) En exploitant de même l'égalité $\lambda = -\mu$, il résulte :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + 2(-\lambda) = 2 - \lambda \\ y = 3 + 3\lambda - (-\lambda) = 3 + 4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 2\lambda - 3(-\lambda) = -1 + 5\lambda \end{cases}$$

2^e méthode

Déterminons l'équation cartésienne du plan π contenant les droites d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 3 + 3\lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 3 + 7\mu \\ 2x - z = 5 + 7\mu \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{vmatrix}$$

Donc $(\pi) : x - y + z + 2 = 0$

Déterminons l'équation du plan n_{d_1} contenant la droite d_1 et normal à π :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Le plan n_{d_1} s'écrit $5x + y - 4z + d = 0$ et passe par $P(2; 3; -1)$:

$$5 \cdot 2 + 3 - 4 \cdot (-1) + d = 0 \text{ implique } d = -17.$$

On a donc trouvé $(n_{d_1}) : 5x + y - 4z - 17 = 0$.

Déterminons l'équation du plan n_{d_2} contenant la droite d_2 et normal à π :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le plan n_{d_2} est de la forme $4x + 5y + z + d = 0$ et passe par $P(2; 3; -1)$:

$$4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-1) + d = 0 \text{ donne } d = -22.$$

On a donc trouvé (n_{d_2}) : $4x + 5y + z - 22 = 0$.

Les plans bissecteurs des plans n_{d_1} et n_{d_2} sont donnés par :

$$\frac{5x + y - 4z - 17}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{4x + 5y + z - 22}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2}}$$

$$1) \quad 5x + y - 4z - 17 = 4x + 5y + z - 22$$

$$(\beta_1) : x - 4y - 5z + 5 = 0$$

$$2) \quad 5x + y - 4z - 17 = -4x - 5y - z + 22$$

$$9x + 6y - 3z - 39 = 0$$

$$(\beta_2) : 3x + 2y - z - 13 = 0$$

Les bissectrices recherchées sont données par l'intersection des plans bissecteurs β_1 et β_2 avec le plan π contenant les droites d_1 et d_2 .

$$1) \quad \begin{cases} x - 4y - 5z + 5 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x - 4y - 5z + 5 = 0 \\ 3y + 6z - 3 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \\ : 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x - 4y - 5z + 5 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x + 3z + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 3x + 2y - z - 13 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 13 = 0 \\ 5y - 4z - 19 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-1) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 12x + 3y - 33 = 0 \\ 5y - 4z - 19 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \\ : 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4x + y - 11 = 0 \\ 5y - 4z - 19 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{19}{4} + \frac{5}{4}\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{4}\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 + \frac{5}{4}\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = -1 + 5\lambda \end{cases}$$