4.15 Les droites BA et BC passent par le point $B(3\,;-2\,;1)$ et admettent pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Leurs équations paramétriques sont par conséquent :

$$(BA) : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (BC) : \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = -2 + 3\mu \\ z = 1 + 6\mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Le plan ABC passe par le point B et admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. Son équation paramétrique est ainsi :

$$(ABC) : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - 2\mu \\ y = -2 + \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda + 6\mu \end{cases} , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1re méthode pour déterminer les bissectrices

Un point P du plan ABC se situe sur l'une des bissectrices du triangle ABC issue du sommet B s'il est équidistant des droites BA et BC, c'est-à-dire si $\delta(P\,;BA) = \delta(P\,;BC)$.

$$\delta(P\,;BA) = \frac{\|\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BA}\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3 + 2\lambda - 2\mu - 3 \\ -2 + \lambda + 3\mu - (-2) \\ 1 - 2\lambda + 6\mu - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2\lambda - 2\mu \\ \lambda + 3\mu \\ -2\lambda + 6\mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -12\mu \\ 8\mu \\ -8\mu \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4\,|\mu| \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{4\,|\mu|\,\sqrt{17}}{\sqrt{9}} = \frac{4\,|\mu|\,\sqrt{17}}{3}$$

$$\delta(P\,;BC) = \frac{\|\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3 + 2\lambda - 2\mu - 3 \\ -2 + \lambda + 3\mu - (-2) \\ 1 - 2\lambda + 6\mu - 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2\,\lambda - 2\,\mu \\ \lambda + 3\,\mu \\ -2\,\lambda + 6\,\mu \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 12\,\lambda \\ -8\,\lambda \\ 8\,\lambda \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{4\,|\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{4\,|\lambda|\,\sqrt{17}}{\sqrt{49}} = \frac{4\,|\lambda|\,\sqrt{17}}{7}$$

La condition $\delta(\mathrm{P}\,;\mathrm{BA}) = \delta(\mathrm{P}\,;\mathrm{BC})$ équivaut à $\frac{|\mu|}{3} = \frac{|\lambda|}{7}$, c'est-à-dire $\mu = \pm\frac{3}{7}\,\lambda$.

1) En introduisant l'égalité $\mu = \frac{3}{7}\,\lambda$ dans l'équation paramétrique du plan ABC, on obtient l'équation paramétrique de la première bissectrice :

$$(b_1) : \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda - 2 \cdot \frac{3}{7}\,\lambda = 3 + \frac{8}{7}\,\lambda = 3 + 2\,\lambda \\ y = -2 + \lambda + 3 \cdot \frac{3}{7}\,\lambda = -2 + \frac{16}{7}\,\lambda = -2 + 4\,\lambda \\ z = 1 - 2\,\lambda + 6 \cdot \frac{3}{7}\,\lambda = 1 + \frac{4}{7}\,\lambda = 1 + \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) En exploitant l'égalité $\mu = -\frac{3}{7}\,\lambda$ dans l'équation paramétrique du plan ABC, on trouve l'équation paramétrique de la seconde bissectrice :

$$(b_2) : \begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda - 2 \cdot (-\frac{3}{7}\,\lambda) = 3 + \frac{20}{7}\,\lambda = 3 + 10\,\lambda \\ y = -2 + \lambda + 3 \cdot (-\frac{3}{7}\,\lambda) = -2 - \frac{2}{7}\,\lambda = -2 - \lambda \\ z = 1 - 2\,\lambda + 6 \cdot (-\frac{3}{7}\,\lambda) = 1 - \frac{32}{7}\,\lambda = 1 - 16\,\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2$^{\mathrm{e}}$ méthode pour déterminer les bissectrices

Déterminons l'équation cartésienne du plan ABC :

$$\begin{cases} x = 3 + 2\,\lambda - 2\,\mu \\ y = -2 + \lambda + 3\,\mu \\ z = 1 - 2\,\lambda + 6\,\mu \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \\ \end{array} \right| \begin{array}{c} \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2\,y = 7 - 8\,\mu \\ 2\,y + z = -3 + 12\,\mu \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \right.$$

$(\mathrm{ABC}) : 3\,x - 2\,y + 2\,z - 15 = 0$

Déterminons le plan n_{BA} contenant la droite BA et normal au plan ABC :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Son équation est de la forme $2\,x + 10\,y + 7\,z + d = 0$ et il contient $\mathrm{B}(3\,;-2\,;1)$:

$2 \cdot 3 + 10 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + d = 0$ implique $d = 7$.

On a donc obtenu : $(n_{\mathrm{BA}}) : 2\,x + 10\,y + 7\,z + 7 = 0\,.$

Déterminons le plan n_{BC} contenant la droite BC et normal au plan ABC :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Son équation s'écrit $18\,x + 22\,y - 5\,z + d = 0$ et il passe par $\mathrm{B}(3\,;-2\,;1)$:
$18 \cdot 3 + 22 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 + d = 0$ donne $d = -5$.
Il en résulte $(n_{\mathrm{BC}}) : 18\,x + 22\,y - 5\,z - 5 = 0$.

Calculons les plans bissecteurs des plans n_{BA} et n_{BC} :

$$\frac{2\,x + 10\,y + 7\,z + 7}{\sqrt{2^2 + 10^2 + 7^2}} = \pm \frac{18\,x + 22\,y - 5\,z - 5}{\sqrt{18^2 + 22^2 + (-5)^2}}$$

$$\frac{2\,x + 10\,y + 7\,z + 7}{3\,\sqrt{17}} = \pm \frac{18\,x + 22\,y - 5\,z - 5}{7\,\sqrt{17}}$$

$$7\,(2\,x + 10\,y + 7\,z + 7) = \pm 3\,(18\,x + 22\,y - 5\,z - 5)$$

$$14\,x + 70\,y + 49\,z + 49 = \pm(54\,x + 66\,y - 15\,z - 15)$$

1) Le premier plan bissecteur est donné par :
$14\,x + 70\,y + 49\,z + 49 = 54\,x + 66\,y - 15\,z - 15$
$-40\,x + 4\,y + 64\,z + 64 = 0$
$-10\,x + y + 16\,z + 16 = 0$

Déterminons l'équation paramétrique de la première bissectrice :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10\,x &+& y &+& 16\,z &+& 16 &=& 0 \\ 3\,x &-& 2\,y &+& 2\,z &-& 15 &=& 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot 3 \\ \cdot 10 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10\,x &+& y &+& 16\,z &+& 16 &=& 0 \\ &-& 17\,y &+& 68\,z &-& 102 &=& 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \\ : 17 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10\,x &+& y &+& 16\,z &+& 16 &=& 0 \\ &-& y &+& 4\,z &-& 6 &=& 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -10\,x & & &+& 20\,z &+& 10 &=& 0 \\ &-& y &+& 4\,z &-& 6 &=& 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} : -10 \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & &-& 2\,z &-& 1 &=& 0 \\ &-& y &+& 4\,z &-& 6 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\,\lambda \\ y = -6 + 4\,\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + 2\,\lambda \\ y = -2 + 4\,\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right. , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Le second plan bissecteur est donné par :
$14\,x + 70\,y + 49\,z + 49 = -54\,x - 66\,y + 15\,z + 15$
$68\,x + 136\,y + 34\,z + 34 = 0$

$2\,x+4\,y+z+1=0$

Déterminons l'équation paramétrique de la seconde bissectrice :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x &+& 4\,y &+& z &+& 1 &=& 0 \\ 3\,x &-& 2\,y &+& 2\,z &-& 15 &=& 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x &+& 4\,y &+& z &+& 1 &=& 0 \\ & & 16\,y &-& z &+& 33 &=& 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2\,x &+& 20\,y & & &+& 34 &=& 0 \\ & & 16\,y &-& z &+& 33 &=& 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} :2 \\ \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x &+& 10\,y & & &+& 17 &=& 0 \\ & & 16\,y &-& z &+& 33 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& -17 &-& 10\,\lambda \\ y &=& & & \lambda \\ z &=& 33 &+& 16\,\lambda \end{array}\right. \ ,\ \lambda\in\mathbb{R} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 3 &+& 10\,\lambda \\ y &=& -2 &-& \lambda \\ z &=& 1 &-& 16\,\lambda \end{array}\right. \ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Sélection de la bissectrice intérieure

Il reste encore à distinguer la bissectrice intérieure de la bissectrice extérieure. À cette fin, on va déterminer le point d'intersection de chaque bissectrice avec la droite AC.

La droite AC passe par le point $\mathrm{A}(5\,;-1\,;-1)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$. Son équation paramétrique est ainsi

$$(\mathrm{AC}):\left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 5 &-& 2\,\mu \\ y &=& -1 &+& \mu \\ z &=& -1 &+& 4\,\mu \end{array}\right. \ ,\ \mu\in\mathbb{R}$$

1) Calculons le point d'intersection $\mathrm{I}_1=b_1\cap\mathrm{AC}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3 &+& 2\,\lambda &=& 5 &-& 2\,\mu \\ -2 &+& 4\,\lambda &=& -1 &+& \mu \\ 1 &+& \lambda &=& -1 &+& 4\,\mu \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,\lambda &+& 2\,\mu &=& 2 \\ 4\,\lambda &-& \mu &=& 1 \\ \lambda &-& 4\,\mu &=& -2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \end{array}\right.$$

$10\,\lambda=4$ délivre $\lambda=\frac{2}{5}$.

En remplaçant $\lambda=\frac{2}{5}$ dans la deuxième équation, on trouve : $4\cdot\frac{2}{5}-\mu=1$, d'où suit $\mu=\frac{3}{5}$.

La troisième équation est bien vérifiée : $\frac{2}{5}-4\cdot\frac{3}{5}=-2$.

Les coordonnées du point d'intersection I_1 valent par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3 &+& 2\cdot\frac{2}{5} &=& 5 &-& 2\cdot\frac{3}{5} &=& \frac{19}{5} \\ -2 &+& 4\cdot\frac{2}{5} &=& -1 &+& \frac{3}{5} &=& -\frac{2}{5} \\ 1 &+& \frac{2}{5} &=& -1 &+& 4\cdot\frac{3}{5} &=& \frac{7}{5} \end{array}\right.$$

Vu que $\overrightarrow{\mathrm{AI}_1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et que $\frac{3}{10} \in [0\,;1]$, le point d'intersection I_1 appartient au segment AI_1 : on conclut que la première bissectrice est la bissectrice intérieure.

2) Calculons le point d'intersection $\mathrm{I}_2 = b_2 \cap \mathrm{AC}$:

$$\begin{cases} 3 + 10\,\lambda = 5 - 2\,\mu \\ -2 - \lambda = -1 + \mu \\ 1 - 16\,\lambda = -1 + 4\,\mu \end{cases} \iff \begin{cases} 10\,\lambda + 2\,\mu = 2 \\ -\lambda - \mu = 1 \\ -16\,\lambda - 4\,\mu = -2 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array}\right.$$

$8\,\lambda = 4$ implique $\lambda = \frac{1}{2}$.

En substituant $\lambda = \frac{1}{2}$ dans la deuxième équation, on a : $-\frac{1}{2} - \mu = 1$, de sorte que $\mu = -\frac{3}{2}$.

La troisième équation est par ailleurs bien vérifiée : $-16 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) = -2$.

Les coordonnées du second point d'intersection I_2 sont ainsi fournies par :

$$\begin{cases} 3 + 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 - 2 \cdot (-\frac{3}{2}) = 8 \\ -2 - \frac{1}{2} = -1 + (-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2} \\ 1 - 16 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 4 \cdot (-\frac{3}{2}) = -7 \end{cases}$$

On constate que $\overrightarrow{\mathrm{AI}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Étant donné que $-\frac{3}{4} \notin [0\,;1]$, le point d'intersection I_2 n'appartient pas au segment AC, de sorte que la seconde bissectrice est extérieure au triangle ABC.