4.2 L'angle entre deux plans est égal à l'angle formé par leurs vecteurs normaux.

1) **1^re^ méthode**

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-8}{\sqrt{6}\,\sqrt{29}} = \frac{-8\,\sqrt{174}}{174} = \frac{-4\,\sqrt{174}}{87}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-4\,\sqrt{174}}{87}\right) \approx 127{,}34^\circ$$

Par conséquent, l'angle aigu entre les plans vaut $180^\circ - 127{,}34^\circ = 52{,}66^\circ$.

2^e^ méthode

$$\sin(\varphi) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{6}\,\sqrt{29}}$$

$$= \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{87}} = \frac{\sqrt{4785}}{87}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{4785}}{87}\right) \approx 52{,}66^\circ$$

2) Le plan π_2 admet pour vecteur normal $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1^re^ méthode

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2}{\sqrt{6}\,\sqrt{35}} = \frac{2\,\sqrt{210}}{210} = \frac{\sqrt{210}}{105}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{210}}{105}\right) \approx 82{,}07^\circ$$

2^e^ méthode

$$\sin(\varphi) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -13 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{206}}{\sqrt{6}\,\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{103}}{\sqrt{3 \cdot 35}}$$

$$= \frac{\sqrt{10\ 815}}{105}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{10\ 815}}{105}\right) \approx 82{,}07^\circ$$

3) Le plan π_1 admet pour vecteur normal $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le plan π_2 admet pour vecteur normal $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix} = 23 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1^re^ méthode

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{13}\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{39}}{39}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{39}}{39}\right) \approx 80{,}79^\circ$$

2^e^ méthode

$$\sin(\varphi) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{13}\,\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{1482}}{39}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1482}}{39}\right) \approx 80{,}79^\circ$$