4.3 L'angle entre une droite et un plan est le complémentaire de l'angle entre la droite et la normale au plan.

1) **1re méthode**

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{15}{\sqrt{30}\,\sqrt{29}} = \frac{15\,\sqrt{870}}{870} = \frac{\sqrt{870}}{58}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{870}}{58}\right) \approx 59{,}43^\circ$$

L'angle entre la droite et le plan vaut donc $90^\circ - 59{,}43^\circ = 30{,}57^\circ$.

2e méthode

$$\sin(\varphi) = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ -16 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\sqrt{645}}{\sqrt{30}\,\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{58}}$$

$$= \frac{\sqrt{2494}}{58}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2494}}{58}\right) \approx 59{,}43^\circ$$

L'angle recherché vaut ainsi $90^\circ - 59{,}43^\circ = 30{,}57^\circ$.

2) **1re méthode**

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{-9}{\sqrt{6}\,\sqrt{38}} = -\frac{9}{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 19}} = -\frac{9}{2\,\sqrt{57}}$$

$$= -\frac{9\,\sqrt{57}}{2 \cdot 57} = -\frac{3\,\sqrt{57}}{38}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{3\,\sqrt{57}}{38}\right) \approx 126{,}59^\circ$$

L'angle aigu entre la droite et la normale au plan vaut par conséquent $180^\circ - 126{,}59^\circ = 53{,}41^\circ$.

Finalement, l'angle aigu entre la droite et le plan est $90^\circ - 53{,}41^\circ = 36{,}59^\circ$.

2e méthode

$$\sin(\varphi) = \frac{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}1\\11\\5\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{6}\sqrt{38}}$$

$$= \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 19}} = \frac{7}{2\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{38}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{7\sqrt{19}}{38}\right) \approx 53{,}41^\circ$$

L'angle entre la droite et le plan est donné par $90^\circ - 53{,}41^\circ = 36{,}59^\circ$.