4.4 Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan recherché.

Comme $\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on doit avoir :

$0 = \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\,a - b - 2\,c$ c'est-à-dire $2\,a + b + 2\,c = 0\,.$

Puisque le plan recherché doit former un angle de 45° avec le plan d'équation $x - 4\,y + z - 8 = 0$, on obtient :

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pm 45^\circ) = \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{a - 4\,b + c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot 3\sqrt{2}}$$

En posant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et en effectuant les produits croisés, on trouve : $a - 4\,b + c = \pm 3\,.$

Il s'agit par conséquent de résoudre les systèmes $\begin{cases} 2\,a + b + 2\,c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a - 4\,b + c = \pm 3 \end{cases}$

1) $\begin{cases} 2\,a + b + 2\,c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a - 4\,b + c = 3 \end{cases}$

La dernière équation donne $c = -a + 4\,b + 3$ que l'on substitue dans les deux premières :

$\begin{cases} 2\,a + b + 2\,(-a + 4\,b + 3) = 0 \\ a^2 + b^2 + (-a + 4\,b + 3)^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 9\,b + 6 = 0 \\ 2\,a^2 + 17\,b^2 - 8\,a\,b - 6\,a + 24\,b + 9 = 1 \end{cases}$

La première équation donne $b = -\frac{2}{3}$ que l'on remplace dans la seconde :

$2\,a^2 + 17\cdot(-\frac{2}{3})^2 - 8\,a\cdot(-\frac{2}{3}) - 6\,a + 24\cdot(-\frac{2}{3}) + 9 = 1$

$2\,a^2 - \frac{2}{3}\,a - \frac{4}{9} = 0$

$18\,a^2 - 6\,a - 4 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 18\cdot(-4) = 324 = 18^2$

(a) $a_1 = \frac{-(-6)+18}{2\cdot 18} = \frac{2}{3}$

$c_1 = -a_1 + 4\,b + 3 = -\frac{2}{3} + 4\cdot(-\frac{2}{3}) + 3 = -\frac{1}{3}$

On obtient ainsi le vecteur normal $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $a_2 = \frac{-(-6)-18}{2\cdot 18} = -\frac{1}{3}$

$c_2 = -a_2 + 4\,b + 3 = -(-\frac{1}{3}) + 4\cdot(-\frac{2}{3}) + 3 = \frac{2}{3}$

On a le vecteur normal $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{cases} 2\,a + b + 2\,c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a - 4\,b + c = -3 \end{cases}$

La dernière équation donne $c = -a + 4\,b - 3$ que l'on remplace dans les deux premières :

$\begin{cases} 2\,a + b + 2\,(-a + 4\,b - 3) = 0 \\ a^2 + b^2 + (-a + 4\,b - 3)^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 9\,b - 6 = 0 \\ 2\,a^2 + 17\,b^2 - 8\,a\,b + 6\,a - 24\,b + 9 = 1 \end{cases}$

La première équation donne $b = \frac{2}{3}$ que l'on remplace dans la seconde :

$2\,a^2 + 17\cdot(\frac{2}{3})^2 - 8\,a\cdot(\frac{2}{3}) + 6\,a - 24\cdot(\frac{2}{3}) + 9 = 1$

$2\,a^2 + \frac{2}{3}\,a - \frac{4}{9} = 0$

$18\,a^2 + 6\,a - 4 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4\cdot 18\cdot(-4) = 324 = 18^2$

(a) $a_1 = \frac{-6+18}{2\cdot 18} = \frac{1}{3}$

$c_1 = -a_1 + 4\,b - 3 = -\frac{1}{3} + 4\cdot(\frac{2}{3}) - 3 = -\frac{2}{3}$

On trouve ainsi le vecteur normal $\vec{n_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{n_2}$

(b) $a_2 = \frac{-6-18}{2\cdot 18} = -\frac{2}{3}$

$c_2 = -a_2 + 4\,b - 3 = -(-\frac{2}{3}) + 4\cdot(\frac{2}{3}) - 3 = \frac{1}{3}$

Il en résulte le vecteur normal $\vec{n_4} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{n_1}$

En résumé, le plan recherché peut avoir pour vecteur normal :

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Son équation cartésienne est alors de la forme $2\,x - 2\,y - z + d = 0$.

Vu qu'il passe par le point $A(4\,;2\,;1)$, on a $2\cdot 4 - 2\cdot 2 - 1 + d = 0$, si bien que $d = -3$.

Le plan recherché a pour équation $\boxed{2\,x - 2\,y - z - 3 = 0}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Son équation cartésienne est de la forme $x + 2\,y - 2\,z + d = 0$.
Comme il passe par le point $\mathrm{A}(4\,;2\,;1)$, on doit avoir $4+2\cdot 2-2\cdot 1+d = 0$, d'où suit $d = -6$.
On conclut que l'équation du plan recherché est $\boxed{x + 2\,y - 2\,z - 6 = 0}$.