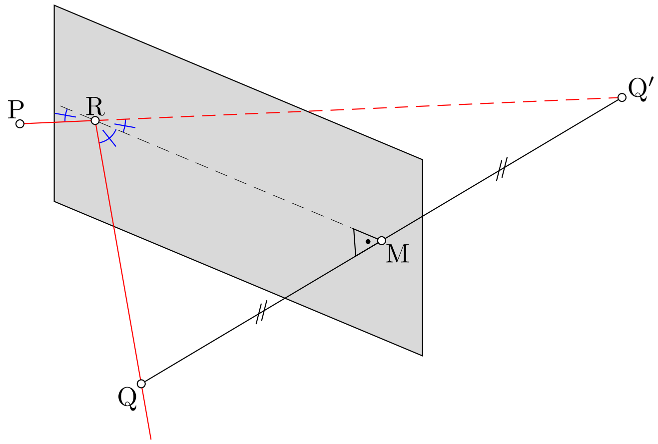
4.5



Calcul de Q', symétrique de Q par rapport au plan $x + y = 0$

La normale au plan du miroir passant par Q admet pour équation paramétrique

$$(n) : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculons le point d'intersection M de cette droite avec le plan du miroir : $(2 + \lambda) + (5 + \lambda) = 0$ implique $\lambda = -\frac{7}{2}$.

Les coordonnées du point M sont ainsi données par $\begin{cases} x = 2 + (-\frac{7}{2}) = -\frac{3}{2} \\ y = 5 + (-\frac{7}{2}) = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases}$

Étant donné que le point M est le milieu des points Q et Q', on obtient $M(-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\,;1) = (\frac{2+q'_1}{2}\,;\frac{5+q'_2}{2}\,;\frac{1+q'_3}{2})$

de sorte que le point Q' a pour coordonnées $\boxed{Q'(-5\,;-2\,;1)}$.

Calcul du point d'incidence R

La droite PQ' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{PQ'} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passe par le point $P(3\,;-2\,;1)$, si bien qu'elle admet pour équation paramétrique

$$(PQ') : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Calculons le point d'intersection entre la droite PQ' et le plan du miroir : $(3 + \lambda) + (-2) = 0$ donne $\lambda = -1$.

Les coordonnées du point R sont donc $\begin{cases} x = 3 + (-1) = 2 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$

Le point d'incidence du rayon lumineux sur le miroir est ainsi $\boxed{R(2\,;-2\,;1)}$.

Calcul de l'angle d'incidence

L'angle φ entre le rayon incident et la normale au plan du miroir est donné par la formule :

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par suite, on obtient $\varphi = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 45^\circ$.

On conclut que l'angle d'incidence vaut $90^\circ - 45^\circ = \boxed{45^\circ}$.