4.6 Soit $\mathrm{H}(x_{\mathrm{H}}\,;y_{\mathrm{H}}\,;z_{\mathrm{H}})$ la projection orthogonale du point P sur le plan π.

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π.

1) $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - x_{\mathrm{H}} \\ y_0 - y_{\mathrm{H}} \\ z_0 - z_{\mathrm{H}} \end{pmatrix} = a\,(x_0 - x_{\mathrm{H}}) + b\,(y_0 - y_{\mathrm{H}}) + c\,(z_0 - z_{\mathrm{H}})$

$= a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - a\,x_{\mathrm{H}} - b\,y_{\mathrm{H}} - c\,z_{\mathrm{H}}$

2) Comme $\mathrm{H} \in \pi$, les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan π : $a\,x_{\mathrm{H}} + b\,y_{\mathrm{H}} + c\,z_{\mathrm{H}} + d = 0$.
Il s'ensuit que $-a\,x_{\mathrm{H}} - b\,y_{\mathrm{H}} - c\,z_{\mathrm{H}} = d$.
Donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}} = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 \underbrace{-a\,x_{\mathrm{H}} - b\,y_{\mathrm{H}} - c\,z_{\mathrm{H}}}_{+d} = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d$

3) On sait que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}} = \|\vec{n}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\|\,\cos(\varphi)$ où φ désigne l'angle entre les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$.
Comme les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ sont colinéaires, on a $\varphi = 0^\circ$ ou $\varphi = 180^\circ$, si bien que $\cos(\varphi) = \pm 1$.
En prenant la valeur absolue des membres de l'égalité $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}} = \|\vec{n}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\|\,\cos(\varphi)$, on obtient :
$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}}| = \big|\,\|\vec{n}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\|\,\cos(\varphi)\,\big| = \big|\,\|\vec{n}\|\,\big| \cdot \big|\,\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\|\,\big| \cdot \big|\cos(\varphi)\big|$
$= \|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\| \cdot 1 = \|\vec{n}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\|$

En utilisant le résultat obtenu en 2), on conclut finalement que :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HP}}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$