

4.8 Équation cartésienne du plan BCD

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent des vecteurs directeurs du plan BCD.

Le plan BCD admet ainsi pour équation paramétrique :

$$(\text{BCD}) : \begin{cases} x = -4 + 9\lambda + 3\mu \\ y = -4 + 4\lambda + 11\mu \\ z = 4 - \lambda + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Éliminons les paramètres :

$$\begin{cases} x = -4 + 9\lambda + 3\mu \\ y = -4 + 4\lambda + 11\mu \\ z = 4 - \lambda + \mu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 9z = 32 + 12\mu \\ y + 4z = 12 + 15\mu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot (-4) \end{array}$$

$$5x - 4y + 29z = 112 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 5x - 4y + 29z - 112 = 0.$$

Calcul de la hauteur h_A

$$\begin{aligned} h_A = \delta(A; \text{BCD}) &= \frac{|5 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 29 \cdot 6 - 112|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 29^2}} = \frac{|56|}{\sqrt{882}} = \frac{56}{21\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Équation cartésienne du plan ACD

Le plan ACD admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne du plan ACD s'obtient à l'aide du déterminant

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -3 \\ y-4 & -4 & 3 \\ z-6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4x - 8 + 9y - 36 + 9z - 54 - 12z + 72 + 9x - 18 + 3y - 12 \\ &= 13x + 12y - 3z - 56 \end{aligned}$$

Calcul de la hauteur h_B

$$\begin{aligned} h_B = \delta(B; \text{ACD}) &= \frac{|13 \cdot (-4) + 12 \cdot (-4) - 3 \cdot 4 - 56|}{\sqrt{13^2 + 12^2 + (-3)^2}} = \frac{|-168|}{\sqrt{322}} = \frac{168\sqrt{322}}{322} \\ &= \frac{12\sqrt{322}}{23} \end{aligned}$$

Équation cartésienne du plan ABD

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituent des vecteurs directeurs du plan ABD.

Un vecteur normal au plan ABD est $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ainsi l'équation cartésienne du plan ABD est de la forme $x - 3z + d = 0$.

Comme le point A(2 ; 4 ; 6) appartient à ce plan, on doit avoir $2 - 3 \cdot 6 + d = 0$, si bien que $d = 16$.

En résumé, le plan ABD a pour équation cartésienne $x - 3z + 16 = 0$.

Calcul de la hauteur h_C

$$h_C = \delta(C; ABD) = \frac{|5 - 3 \cdot 3 + 16|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

Équation cartésienne du plan ABC

Le plan ABC a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne est donnée par le déterminant

$$0 = \begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ y-4 & 4 & -4 \\ z-6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12x + 24 + 3y - 12 - 12z + 72 - 12z + 72 + 4x \\ - 8 + 9y - 36 = -8x + 12y - 24z + 112$$

En divisant cette dernière équation par -4 , on obtient $2x - 3y + 6z - 28 = 0$.

Calcul de la hauteur h_D

$$h_D = \delta(D; ABC) = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 \cdot 7 + 6 \cdot 5 - 28|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{49}} = \frac{21}{7} = 3$$