1 Racines

La **racine carrée** d'un nombre réel positif a est l'unique nombre réel positif r dont le carré est égal au nombre a :

$$r = \sqrt{a} \iff r^2 = a$$

Proposition *Soient a et b deux nombres réels positifs.*

1) $\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}$ *2)* $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$ *3)* $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ *si* $b \neq 0$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
Par exemple $7 = \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16} = 5$

Preuve

1) $\left(\left(\sqrt{a}\right)^p\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^{2\,p} = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right)^p = a^p = \left(\sqrt{a^p}\right)^2$

2) $\left(\sqrt{a}\,\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = a\,b = \left(\sqrt{a\,b}\right)^2$

3) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \dfrac{a}{b} = \left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2$

1.1 Simplifier :

1) $\sqrt{12}$ 2) $\sqrt{27}$ 3) $\sqrt{40}$ 4) $\sqrt{72}$

5) $\sqrt{75}$ 6) $\sqrt{1000}$ 7) $\sqrt{54}$ 8) $\sqrt{80}$

9) $\sqrt{\dfrac{1}{9}}$ 10) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 11) $\sqrt{\dfrac{9}{8}}$ 12) $\sqrt{\dfrac{7}{27}}$

1.2 Simplifier :

1) $\sqrt{6}\,\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{8}\,\sqrt{3}$ 3) $\sqrt{2}\,\sqrt{40}$ 4) $\sqrt{10}\,\sqrt{15}$

5) $\sqrt{7}\,\sqrt{\dfrac{1}{7}}$ 6) $\sqrt{5}\,\sqrt{\dfrac{1}{35}}$ 7) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ 8) $\sqrt{\dfrac{1}{15}}\,\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

9) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}\,\sqrt{\dfrac{27}{16}}$ 10) $\sqrt{\dfrac{1}{25}}\,\sqrt{\dfrac{144}{49}}$ 11) $\sqrt{32}\,\sqrt{\dfrac{1}{72}}$ 12) $\sqrt{\dfrac{28}{5}}\,\sqrt{\dfrac{35}{4}}$

1.3 Effectuer :

1) $5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - 7\sqrt{2}$

3) $2\sqrt{54} - 2\sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{6}$ 4) $\sqrt{36} + 3\sqrt{6} - 5\sqrt{144}$

5) $2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{18} + \sqrt{\frac{2}{9}} - \sqrt{\frac{9}{8}}$ 6) $\sqrt{48} - \sqrt{\frac{12}{25}} + \sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{75}$

7) $2\sqrt{28} - 6\sqrt{\frac{7}{4}} + 14\sqrt{\frac{1}{7}}$ 8) $\sqrt{72} + 3 - \sqrt{50} - \sqrt{25}$

9) $5\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{3}{4}} + 2\sqrt{27} - 8\sqrt{\frac{3}{16}}$ 10) $-\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{60} + \sqrt{\frac{1}{15}}$

1.4 Effectuer et simplifier :

1) $(4 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$ 2) $(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{15}$

3) $(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$ 4) $(7 + 2\sqrt{6})(9 - 5\sqrt{6})$

5) $(9\sqrt{12} + 3)(\sqrt{3} + 8)$ 6) $(4\sqrt{3} + \sqrt{45})(\sqrt{5} - 2\sqrt{27})$

7) $(\sqrt{50} - 5\sqrt{7})(2\sqrt{28} - \sqrt{18})$ 8) $(6 + 12\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7})$

9) $(3\sqrt{3} + 2\sqrt{28} - \sqrt{12} + 16\sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$

10) $(4 - 3\sqrt{7})(\sqrt{28} - 1)(2 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{63})$

1.5 Vérifier les égalités :

1) $\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{48}$ 2) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$

3) $\sqrt{4 + \sqrt{12}} = 1 + \sqrt{3}$ 4) $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

5) $\sqrt{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}} = 2$ 6) $2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

1.6 Simplifier en élevant au carré, puis en prenant la racine :

1) $\sqrt{10 + \sqrt{2}} + \sqrt{10 - \sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}$

1.7 Rendre rationnel le dénominateur :

1) $\dfrac{18}{4 - \sqrt{7}}$ 2) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

4) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 5) $\dfrac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ 6) $\dfrac{7\sqrt{5} + 5\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

1.8 Effectuer :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} + \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$ 2) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

3) $\dfrac{10 + 3\sqrt{21}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} + \dfrac{10 - 2\sqrt{21}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$ 4) $\dfrac{2}{3 - \sqrt{5}} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$

5) $\dfrac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{7}} + \dfrac{6}{\sqrt{7} - 5}$ 6) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \dfrac{7}{3 - \sqrt{2}} + \dfrac{5}{2 - \sqrt{3}}$

Soient a un nombre réel positif et n un nombre naturel. La **racine n-ième** du nombre réel a, notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre réel positif r défini par :

$$r = \sqrt[n]{a} \iff r^n = a$$

Proposition *Soient a et b deux nombres réels positifs.*

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$ *2)* $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$ *3)* $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ *si* $b \neq 0$

1.9 Démontrer les propriétés de la proposition précédente.

1.10 On donne : $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{270} \approx 6{,}46$; $\sqrt[3]{2700} \approx 13{,}92$.
En déduire une valeur approchée des nombres suivants :
1) $\sqrt[3]{27\,000}$ 2) $\sqrt[3]{270\,000}$ 3) $\sqrt[3]{2\,700\,000}$
4) $\sqrt[3]{2{,}7}$ 5) $\sqrt[3]{0{,}27}$ 6) $\sqrt[3]{0{,}027}$

1.11 Vérifier les égalités : $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$.

1.12 Déterminer le plus grand des deux nombres :
1) $2\sqrt[3]{5}$ et $3\sqrt[3]{4}$ 2) $5\sqrt[4]{6}$ et $6\sqrt[4]{5}$ 3) $\sqrt[3]{4}$ et $\sqrt[4]{3}$
4) $\sqrt{5}$ et $\sqrt[3]{11}$ 5) $\sqrt[3]{3}$ et $\sqrt[5]{5}$

Réponses

1.1	1) $2\sqrt{3}$	2) $3\sqrt{3}$	3) $2\sqrt{10}$	4) $6\sqrt{2}$
	5) $5\sqrt{3}$	6) $10\sqrt{10}$	7) $3\sqrt{6}$	8) $4\sqrt{5}$
	9) $\dfrac{1}{3}$	10) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	11) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$	12) $\dfrac{\sqrt{21}}{9}$
1.2	1) $\sqrt{30}$	2) $2\sqrt{6}$	3) $4\sqrt{5}$	4) $5\sqrt{6}$
	5) 1	6) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$	7) $\dfrac{\sqrt{42}}{6}$	8) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$
	9) $\dfrac{3}{2}$	10) $\dfrac{12}{35}$	11) $\dfrac{2}{3}$	12) 7
1.3	1) $\dfrac{19\sqrt{2}}{6}$	2) $3\sqrt{2}$	3) $-2\sqrt{6}$	4) $-54+3\sqrt{6}$
	5) $-\dfrac{29\sqrt{2}}{12}$	6) $\dfrac{284\sqrt{3}}{15}$	7) $3\sqrt{7}$	8) $\sqrt{2}-2$
	9) $13\sqrt{3}$	10) $-\dfrac{22\sqrt{15}}{15}$		
1.4	1) $4\sqrt{3}-3$	2) $5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$	3) $1-\sqrt{5}$	4) $3-17\sqrt{6}$
	5) $78+147\sqrt{3}$	6) $-57-14\sqrt{15}$	7) $-170+35\sqrt{14}$	8) $-402+6\sqrt{7}$
	9) $-61+14\sqrt{6}-8\sqrt{14}+4\sqrt{21}$		10) $752-235\sqrt{7}$	
1.6	1) $\sqrt{20+14\sqrt{2}}$		2) $\sqrt{14}$	

1.7	1) $8+2\sqrt{7}$	2) $\dfrac{2+\sqrt{10}}{3}$	3) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
	4) $4-\sqrt{15}$	5) $\sqrt{15}$	6) $\sqrt{35}$
1.8	1) $2\sqrt{2}$	2) $6-2\sqrt{6}$	3) $\dfrac{15\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{4}$
	4) $\dfrac{9+6\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$	5) $-\frac{5}{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{6}+\frac{2}{3}\sqrt{7}$	6) $7+6\sqrt{3}$
1.10	1) 30	2) $\approx 64{,}6$	3) $\approx 139{,}2$
	4) $\approx 1{,}392$	5) $\approx 0{,}646$	6) $0{,}3$
1.12	1) $2\sqrt[3]{5}<3\sqrt[3]{4}$	2) $5\sqrt[4]{6}<6\sqrt[4]{5}$	3) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{3}$
	4) $\sqrt{5}>\sqrt[3]{11}$	5) $\sqrt[3]{3}>\sqrt[5]{5}$	