1 Raisonnement par récurrence

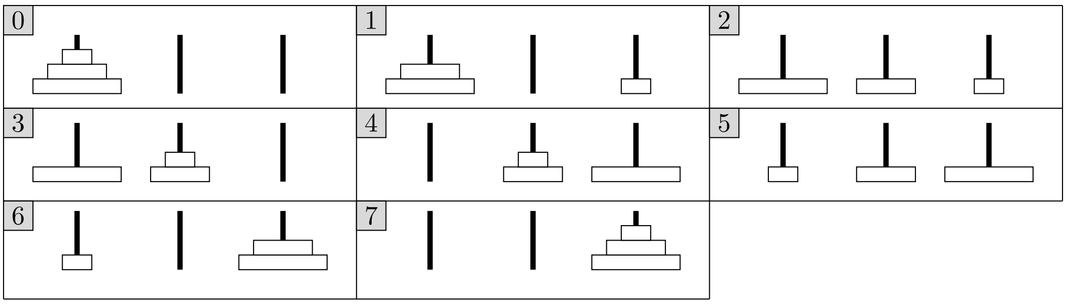
On va illustrer le raisonnement par récurrence à partir du jeu des tours de Hanoï. Ce divertissement a été imaginé par le mathématicien français Édouard Lucas en 1883.

Dans ce jeu, on dispose de trois piquets et d'un certain nombre de disques, tous de taille différente, empilés du plus grand (en bas) au plus petit (en haut). Le but du jeu est de déplacer la pile de disques du premier au troisième piquet, en s'aidant du deuxième piquet et en suivant deux règles :

1) on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois ;
2) on ne peut déplacer un disque que sur un disque plus grand que lui ou sur un piquet vide.

Si n désigne le nombre de disques, on appelle u_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour gagner la partie.

On remarque facilement que $u_1 = 1$, $u_2 = 3$ ou aussi $u_3 = 7$, comme l'illustre la figure suivante :



On peut encore constater que $u_4 = 15$ ou $u_5 = 31$, pour finalement se demander ce que vaut le terme général u_n.

En résumant les observations précédentes sous forme d'un tableau

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$\dots$	u_n	$\dots$
1	3	7	15	31	$\dots$	$2^n - 1$	$\dots$

on formule l'hypothèse $u_n = 2^n - 1$.

Cette conjecture doit cependant être prouvée. C'est grâce à un raisonnement par récurrence que nous allons démontrer cette formule.

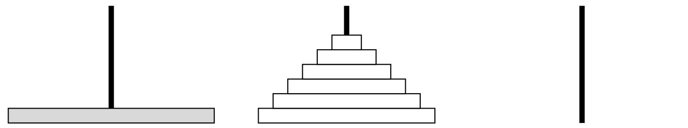
On sait déjà que cette formule $u_n = 2^n - 1$ est vraie lorsque $n = 1$.

On va à présent montrer que si la formule $u_n = 2^n - 1$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors elle l'est également pour $n + 1$.

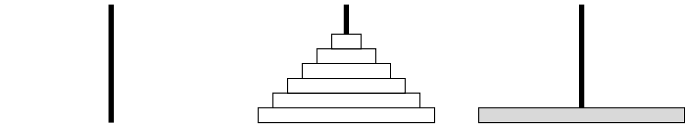
On suppose donc que $u_n = 2^n - 1$ et il s'agit de prouver que $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

Considérons $n + 1$ disques situés sur le premier piquet et voyons combien de déplacements sont au minimum nécessaires pour les déplacer sur le troisième piquet.

D'après l'hypothèse de récurrence, le déplacement des n premiers disques sur le deuxième piquet nécessite $2^n - 1$ déplacements.



Il faut ensuite compter le déplacement du disque $n+1$ sur le troisième piquet.



Selon l'hypothèse de récurrence, il faut enfin $2^n - 1$ déplacements pour faire passer les n premiers disques du deuxième au troisième piquet.

En résumé, on a $u_{n+1} = (2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$.
La preuve est ainsi terminée.

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on procède en deux étapes :

initialisation : on vérifie que la propriété est vraie lorsque $n = 1$;

hérédité : on montre que si la propriété est vraie pour un entier n (c'est l'hypothèse de récurrence), alors elle est aussi vraie pour l'entier suivant $n+1$.

On peut comparer une démonstration par récurrence au principe des dominos :

initialisation : on fait tomber le premier domino ;

hérédité : la chute de tout domino entraîne la chute du suivant.

Exemple

Montrons par récurrence la formule $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, l'identité $1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons la formule $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$ vraie pour n et montrons qu'elle l'est aussi pour $n+1$.

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{\frac{n\,(n+1)}{2}} + n + 1 = \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2\,(n+1)}{2} =$$

$$\frac{n^2 + 3\,n + 2}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\,\big((n+1)+1\big)}{2}$$

1.1 Démontrer que $1+3+5+7+\ldots+(2\,n-1)=n^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.2 Démontrer que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.3 Démontrer que $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n+1}\,n^2=(-1)^{n+1}\,\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.4 Démontrer que $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.5 Démontrer que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2\,n-1)\,(2\,n+1)}=\dfrac{n}{2\,n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.6 Démontrer que $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}=\dfrac{n\,(n+3)}{4\,(n+1)\,(n+2)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.7 Démontrer que 8^n-1 est divisible par 7 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.8 Démontrer que $n^3+5\,n$ est divisible par 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1.9
1) Démontrer que 4^n-1 est divisible par 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2) (a) Démontrer pour tout $n\in\mathbb{N}$: si 4^n+1 est divisible par 3, alors $4^{n+1}+1$ est aussi divisible par 3.
   (b) Pourquoi la proposition suivante est-elle fausse : 4^n+1 est divisible par 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$?

1.10 Établir une formule pour $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

1.11 Établir une formule pour $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\ldots+\dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n}$.

1.12 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Le nombre $n!$ est appelé n factoriel.
Démontrer que $n!>2^n$ pour tout entier $n\geqslant 4$.