1.10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$.

Calculons les premiers termes de cette suite :

$$u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2}}_{u_1} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$u_3 = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}}_{u_2} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$u_4 = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}}_{u_3} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

$$u_5 = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}}_{u_4} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$$

L'examen de ces premiers termes invite à faire l'hypothèse que le terme général u_n est donné par la formule $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Il s'agit à présent de démontrer cette conjecture.

Initialisation : Pour $n = 1$, l'identité $u_1 = \dfrac{1}{1 \cdot (1+1)}$ est avérée.

Hérédité : Supposons la formule $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)}}_{u_n} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{n\,(n+2)+1}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{n^2+2\,n+1}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1}
\end{aligned}$$

On a montré que, si la formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors elle l'est aussi pour $n+1$.