1.11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \ldots + \dfrac{1}{1+2+3+\ldots+n}$.

Calculons les premiers termes de cette suite :

$u_1 = 1$

$$u_2 = \underbrace{1}_{u_1} + \frac{1}{1+2} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$u_3 = \underbrace{1 + \frac{1}{1+2}}_{u_2} + \frac{1}{1+2+3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

$$u_4 = \underbrace{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3}}_{u_3} + \frac{1}{1+2+3+4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{10} = \frac{8}{5}$$

$$u_5 = \underbrace{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4}}_{u_4} + \frac{1}{1+2+3+4+5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{15} = \frac{5}{3}$$

Quitte à calculer encore quelques termes, on en vient à postuler que le terme général u_n est donné par la formule $u_n = \dfrac{2\,n}{n+1}$.

Il convient encore de prouver cette hypothèse.

Initialisation : Pour $n = 1$, l'égalité $u_1 = \dfrac{2 \cdot 1}{1+1}$ est claire.

Hérédité : Supposons la formule $u_n = \dfrac{2\,n}{n+1}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \underbrace{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}}_{u_n} + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n+1} \\
&= \frac{2\,n}{n+1} + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n+1} \\
&= \frac{2\,n}{n+1} + \frac{1}{\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}} \\
&= \frac{2\,n}{n+1} + \frac{2}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{2\,n\,(n+2)+2}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{2\,n^2+4\,n+2}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{2\,(n^2+2\,n+1)}{(n+1)\,(n+2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\,(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)} \\
&= \frac{2\,(n+1)}{n+2} \\
&= \frac{2\,(n+1)}{(n+1)+1}
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée : si la formule est vraie pour un certain entier n, alors elle l'est aussi pour l'entier suivant $n+1$.