1.2 **Initialisation :** Pour $n = 1$, l'identité $1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons l'égalité $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$

$\dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$\dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1) + 6\,(n+1)^2}{6} =$

$\dfrac{(n+1)\,\big(n\,(2\,n+1) + 6\,(n+1)\big)}{6} =$

$\dfrac{(n+1)\,(2\,n^2 + 7\,n + 6)}{6} =$

$\dfrac{(n+1)\,(n+2)\,(2\,n+3)}{6} =$

$\dfrac{(n+1)\,\big((n+1)+1\big)\,\big(2\,(n+1)+1\big)}{6}$

On conclut que si la formule est vraie pour un entier n, alors elle l'est aussi pour l'entier suivant $n+1$, ce qui termine la preuve.

Remarque : la factorisation $2\,n^2 + 7\,n + 6 = (n+2)\,(2\,n+3)$ peut s'obtenir

1) à l'aide du schéma de Horner :

$2 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) + 6 = 0$ et $\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & 6 \\ & -4 & -6 \\ \hline 2 & 3 & 0 \end{array}$

2) en résolvant l'équation $2\,n^2 + 7\,n + 6 = 0$:

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 1$ $\quad n_1 = \frac{-7+1}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2}$ et $n_2 = \frac{-7-1}{2 \cdot 2} = -2$

$2\,n^2 + 7\,n + 6 = 2\,(n + \frac{3}{2})\,(n+2) = (2\,n+3)\,(n+2)$