1.5 **Initialisation :** Pour $n = 1$, l'égalité $\dfrac{1}{1 \cdot 3} = \dfrac{1}{2 \cdot 1 + 1}$ est satisfaite.

Hérédité : Supposons que $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2\,n-1)\,(2\,n+1)} = \dfrac{n}{2\,n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

$\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2\,n-1)\,(2\,n+1)} + \dfrac{1}{(2\,(n+1)-1)\,(2\,(n+1)+1)} =$

$\dfrac{n}{2\,n+1} + \dfrac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} =$

$\dfrac{n\,(2\,n+3)+1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} =$

$\dfrac{2\,n^2+3\,n+1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} =$

$\dfrac{(n+1)\,(2\,n+1)}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} =$

$\dfrac{n+1}{2\,n+3} =$

$\dfrac{n+1}{2\,(n+1)+1}$

La preuve est ainsi achevée, puisqu'on a montré que, si la formule est vraie pour un certain entier n, alors elle l'est aussi pour l'entier suivant $n+1$.

Remarque : la factorisation $2\,n^2+3\,n+1 = (n+1)\,(2\,n+1)$ peut s'obtenir comme suit :

$2\,n^2+3\,n+1 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$

$n_1 = \frac{-3-1}{2 \cdot 2} = -1$ et $n_2 = \frac{-3+1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$

$2\,n^2+3\,n+1 = 2\,\big(n-(-1)\big)\,\big(n-(-\frac{1}{2})\big) =$

$(n+1) \cdot 2 \cdot (n+\frac{1}{2}) = (n+1)\,(2\,n+1)$