1.6 **Initialisation :** Pour $n = 1$, on constate que $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{1 \cdot (1+3)}{4 \cdot (1+1) \cdot (1+2)}$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, soit vérifiée l'égalité

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{n\,(n+3)}{4\,(n+1)\,(n+2)}\,.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\,\big((n+1)+1\big)\,\big((n+1)+2\big)} =$$

$$\frac{n\,(n+3)}{4\,(n+1)\,(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} =$$

$$\frac{n\,(n+3)^2+4}{4\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} =$$

$$\frac{n^3+6\,n^2+9\,n+4}{4\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} =$$

$$\frac{(n+1)\,(n^2+5\,n+4)}{4\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} =$$

$$\frac{(n+1)\,(n+1)\,(n+4)}{4\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} =$$

$$\frac{(n+1)\,(n+4)}{4\,(n+2)\,(n+3)} =$$

$$\frac{(n+1)\,\big((n+1)+3\big)}{4\,\big((n+1)+1\big)\,\big((n+1)+2\big)}$$

Si la formule est vraie pour un certain entier n, alors il en va bien de même pour l'entier suivant $n+1$.

Remarque : la factorisation $n^3+6\,n^2+9\,n+4 = (n+1)\,(n^2+5\,n+4)$ découle du schéma de Horner

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & 9 & 4 \\ & -1 & -5 & -4 \\ \hline 1 & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

après avoir remarqué que $(-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) + 4 = 0$.