1.9 1) **Initialisation :** Pour $n = 1$, on constate que $4^1 - 1 = 3$ est bien divisible par 3.

Hérédité : Supposons $4^n - 1$ divisible par 3 pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par suite, il existe un entier a tel que $4^n - 1 = 3\,a$.

Montrons que l'entier $4^{n+1} - 1$ est aussi divisible par 3.

$4^{n+1} - 1 =$

$4 \cdot 4^n - 1 =$

$(3 + 1) \cdot 4^n - 1 =$

$3 \cdot 4^n + \underbrace{4^n - 1}_{3\,a} =$

$3 \cdot 4^n + 3\,a =$

$3\,(4^n + a)$

2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $4^n + 1$ soit divisible par 3.

Par hypothèse, il existe un entier a tel que $4^n + 1 = 3\,a$.

$4^{n+1} + 1 =$

$4 \cdot 4^n + 1 =$

$(3 + 1) \cdot 4^n + 1 =$

$3 \cdot 4^n + \underbrace{4^n + 1}_{3\,a} =$

$3 \cdot 4^n + 3\,a =$

$3\,(4^n + a)$

On a ainsi montré que si $4^n + 1$ est divisible par 3, alors $4^{n+1} + 1$ est lui aussi divisible par 3.

(b) Le raisonnement précédent montre uniquement l'hérédité ; l'initialisation n'est jamais vérifiée : $4^n + 1$ n'est jamais divisible par 3, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Cette dernière affirmation doit encore être prouvée. Plus précisément, montrons par récurrence que le reste de la division de $4^n + 1$ par 3 vaut 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on constate que $4^1 + 1 = 5$ possède bien un reste de 2, lorsqu'on le divise par 3.

Hérédité : Supposons que le reste de la division de $4^n + 1$ par 3 vaille 2 pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Cela signifie qu'il existe un entier a tel que $4^n + 1 = 3\,a + 2$.

$4^{n+1} + 1 =$

$4 \cdot 4^n + 1 =$

$(3 + 1) \cdot 4^n + 1 =$

$3 \cdot 4^n + \underbrace{4^n + 1}_{3\,a+2} =$

$3 \cdot 4^n + 3\,a + 2 =$

$3\,(4^n + a) + 2$
Étant donné que $4^{n+1} + 1 = 3\,(4^n + a) + 2$, le reste de la division de $4^{n+1} + 1$ par 3 donne également 2.