5 Relations de récurrence linéaires

Relations de récurrence linéaires du premier ordre

5.1 Soit la relation de récurrence linéaire du premier ordre

$$u_{n+1} = 3\,u_n \ , \quad n \geqslant 0$$

avec la condition initiale $u_0 = 2$.

1) Trouver une formule explicite pour u_n.
2) Calculer u_5 de deux façons différentes.

5.2 Résoudre la relation de récurrence $u_n = 5\,u_{n-1}$, $n \geqslant 1$ avec $u_2 = 75$.

5.3 Donner la **solution générale** de la relation de récurrence

$$u_{n+1} = r\,u_n \ , \ n \geqslant 0 \tag{1}$$

avec la condition initiale u_0. Cette relation de récurrence est dite **homogène**.

La relation de recurrence du premier ordre et à coefficients constants

$$u_{n+1} = r\,u_n + f(n) \ , \ n \geqslant 0 \tag{2}$$

est **non homogène**. L'équation (1) est l'équation homogène associée à (2).

Théorème 5.1 *Si $u_n^{(h)}$ est la solution générale de (1) et si $u_n^{(p)}$ est une solution particulière de (2), alors la solution générale de (2) est $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$.*

Preuve :

1) On vérifie facilement que $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$ est une solution de (2) :
$u_{n+1} = u_{n+1}^{(h)} + u_{n+1}^{(p)} = r\,u_n^{(h)} + r\,u_n^{(p)} + f(n) = r\,(u_n^{(h)} + u_n^{(p)}) + f(n) = r\,u_n + f(n)$
2) Soit u_n une solution de (2). Alors la suite $u_n - u_n^{(p)}$ est une solution de (1) :
$u_{n+1} - u_{n+1}^{(p)} = \Big(r\,u_n + f(n)\Big) - \Big(r\,u_n^{(p)} + f(n)\Big) = r\,u_n - r\,u_n^{(p)} = r\,(u_n - u_n^{(p)})$.

Recherche de la solution particulière

La solution particulière s'apparente à la fonction $f(n)$:

1) Dans le cas où $f(n)$ est un polynôme de degré k, alors la solution particulière s'écrit
   (a) $u_n^{(p)} = a_k\, n^k + \ldots + a_2\, n^2 + a_1\, n + a_0$ si $r \neq 1$;
   (b) $u_n^{(p)} = n\,(a_k\, n^k + \ldots + a_2\, n^2 + a_1\, n + a_0)$ si $r = 1$;
   on dit qu'il y a **résonance**.
2) Dans le cas où $f(n) = c\,t^n$ où c et t sont des constantes, alors la solution particulière est de la forme
   (a) $u_n^{(p)} = a\,t^n$ si $t \neq r$;
   (b) $u_n^{(p)} = a\,n\,t^n$ si $t = r$; il y a alors **résonance**.

Exemple Déterminer la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3\,u_n + n^2 - 3\,n + 1 \end{cases}$.

L'équation homogène $u_{n+1} = 3\,u_n$ a pour solution $u_n^{(h)} = u_0^{(h)} \cdot 3^n$.

Ici $r = 3 \neq 1$; puisque $f(n) = n^2 - 3\,n + 1$ est un polynôme du deuxième degré, la solution particulière aussi, si bien qu'elle est de la forme : $u_n^{(p)} = a\,n^2 + b\,n + c$.

La relation de récurrence $u_{n+1}^{(p)} = 3\,u_n^{(p)} + n^2 - 3\,n + 1$ donne

$$a\,(n+1)^2 + b\,(n+1) + c = 3\,(a\,n^2 + b\,n + c) + n^2 - 3\,n + 1$$
$$a\,n^2 + 2\,a\,n + a + b\,n + b + c = 3\,a\,n^2 + 3\,b\,n + 3\,c + n^2 - 3\,n + 1$$
$$\underbrace{(-2\,a - 1)}_{0}\,n^2 + \underbrace{(2\,a - 2\,b + 3)}_{0}\,n + \underbrace{a + b - 2\,c - 1}_{0} = 0$$

On résout $\begin{cases} -2\,a - 1 = 0 \\ 2\,a - 2\,b + 3 = 0 \\ a + b - 2\,c - 1 = 0 \end{cases}$ pour obtenir $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$

c'est-à-dire $u_n^{(p)} = -\frac{1}{2}\,n^2 + n - \frac{1}{4}$.

La solution générale s'écrit donc $u_n = u_0^{(h)} \cdot 3^n - \frac{1}{2}\,n^2 + n - \frac{1}{4}$.

Elle doit vérifier la condition initiale $-1 = u_0 = u_0^{(h)} \cdot 3^0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0 - \frac{1}{4} = u_0^{(h)} - \frac{1}{4}$ d'où l'on tire que $u_0^{(h)} = -\frac{3}{4}$.

On conclut que $u_n = -\frac{3}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}\,n^2 + n - \frac{1}{4}$.

5.4 Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1) $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\,x_n + 1 \ , \ n \geqslant 0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} y_0 = 2 \\ y_{n+1} = 3\,y_n + n + 5 \ , \ n \geqslant 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + n - 1 \ , \ n \geqslant 2 \end{cases}$
4) $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2\,n + 3 \ , \ n \geqslant 1 \end{cases}$
5) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 3^n \ , \ n \geqslant 0 \end{cases}$
6) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_n = 2\,u_{n-1} + 5 \cdot 2^n \ , \ n \geqslant 1 \end{cases}$

5.5 1) Soit s_n la somme des entiers de 1 à n.

(a) Définir s_n par une relation de récurrence.

(b) Résoudre cette relation de récurrence.

2) Soit s_n la somme des carrés des entiers de 1 à n.
Évaluer s_n en fonction de n à l'aide d'une relation de récurrence.

5.6 **Tours de Hanoï**

Dans ce jeu, on dispose de trois piquets et d'un certain nombre de disques, tous de taille différente, empilés du plus grand (en bas) au plus petit (en haut). Le but du jeu est de déplacer la pile de disques du premier au troisième piquet, en s'aidant du deuxième piquet et en suivant deux règles :

1) on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois ;
2) on ne peut déplacer un disque que sur un disque plus grand que lui ou sur un piquet vide.

Si n désigne le nombre de disques, on appelle u_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour gagner la partie.

1) Établir une relation de récurrence pour u_n.
2) Résoudre cette relation de récurrence.

5.7 Un mot de passe, constitué entièrement de chiffres, est considéré valide s'il contient un nombre pair, voire nul, de 0. Par exemple, 1230407869 est valide, mais 120987045608 ne l'est pas. Désignons par u_n le nombre de mots de passe valides à n chiffres.

1) Que valent u_1 et u_2 ?
2) Trouver une relation de récurrence pour u_n.

   Indication : un mot de passe valide à n chiffres s'obtient de deux façons :
   — en ajoutant un chiffre non nul à un mot de passe valide à $n-1$ chiffres ;
   — en ajoutant le chiffre 0 à un mot de passe non valide à $n-1$ chiffres.

3) Résoudre cette relation de récurrence.
4) Calculer u_5 de deux façons différentes.

Relations de récurrence linéaires du deuxième ordre

5.8 Le but de cet exercice est de résoudre la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 6\,u_n - 8\,u_{n-1} \ , \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

Cette relation de récurrence est du deuxième ordre, car chaque terme de la suite est défini à partir des deux termes précédents.

1) Après avoir remarqué que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,u_n - 8\,u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$, justifier qu'il existe une matrice R telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \mathrm{R} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.
2) En déduire que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \mathrm{R}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$
3) Montrer que la matrice R est diagonalisable, puis calculer R^n.
4) Conclure que $u_n = \frac{3}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n$.

Nous allons voir qu'il est possible d'éviter bien des calculs.

Tout d'abord, dès lors que l'on connaît les valeurs propres de la matrice R, on sait que la réponse sera de la forme

$$u_n = a\,4^n + b\,2^n.$$

Les coefficients a et b s'obtiennent facilement à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} 1 = u_0 = a\,4^0 + b\,2^0 = a + b \\ 5 = u_1 = a\,4^1 + b\,2^1 = 4\,a + 2\,b \end{cases}$$

Il suffit de résoudre ce système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4\,a + 2\,b = 5 \end{cases} \overset{L_2 \to L_2 - 4\,L_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} a + b = 1 \\ - 2\,b = 1 \end{cases} \overset{L_1 \to 2\,L_1 + L_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2\,a = 3 \\ - 2\,b = 1 \end{cases}$$

pour trouver la solution $u_n = \frac{3}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n$.

On s'épargne ainsi le calcul des vecteurs propres ou de l'inverse de la matrice de passage. Est-il encore nécessaire d'écrire la matrice R pour déterminer ses valeurs propres ?

En admettant qu'une réponse soit de la forme $u_n = \lambda^n$, alors la relation de récurrence donne :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6\,u_n - 8\,u_{n-1} \\ \lambda^{n+1} &= 6\,\lambda^n - 8\,\lambda^{n-1} \qquad \Big| \ : \lambda^{n-1} \\ \lambda^2 &= 6\,\lambda - 8 \\ \lambda^2 - 6\,\lambda + 8 &= 0 \\ (\lambda - 4)\,(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation caractéristique de la matrice R, qui constitue aussi l'équation caractéristique de la relation de récurrence.

5.9 Avec le moins de calculs possibles, résoudre la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = -5\,u_n - 6\,u_{n-1} \ , \ \ n \geqslant 1 \end{cases}$$

5.10 Le but de cet exercice est de résoudre la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_n = 2\,(u_{n-1} - u_{n-2}) \ , \ \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

1) Vérifier que l'équation caractéristique admet deux solutions complexes.
2) En déduire que $u_n = \frac{1}{2}\,(1-i)\,(1+i)^n + \frac{1}{2}\,(1+i)\,(1-i)^n$.
3) (a) Écrire $1+i$ et $1-i$ sous forme trigonométrique.
   (b) Avec la formule de Moivre, montrer que $u_n = (\sqrt{2})^n \Big(\cos(\frac{n\,\pi}{4}) + \sin(\frac{n\,\pi}{4})\Big)$.

5.11 Le but de cet exercice est de résoudre la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_n = 4\,u_{n-1} - 4\,u_{n-2} \ , \ \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

1) (a) Justifier que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Vérifier que l'équation caractéristique n'admet qu'une seule solution et que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.
2) (a) Vérifier que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer par récurrence : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire que $u_n = (2-n)\,2^{n-1}$.

À nouveau, bien des calculs peuvent être évités.
Lorsque l'équation caractéristique ne possède qu'une seule solution λ, la matrice correspondante n'est pas diagonalisable ; en revanche, il existe toujours un changement de base susceptible de donner une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Ce procédé s'appelle la réduction de Jordan.
La solution de la relation de récurrence est alors de la forme $u_n = a\,\lambda^n + b\,n\,\lambda^n$.

À l'exercice précédent, après avoir trouvé l'unique solution $\lambda = 2$ de l'équation caractéristique, on peut désormais immédiatement conclure que la solution s'écrit $u_n = a\,2^n + b\,n\,2^n$.

On détermine les coefficients a et b grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} 1 = u_0 = a \cdot 2^0 + b \cdot 0 \cdot 2^0 = a \\ 1 = u_1 = a \cdot 2^1 + b \cdot 1 \cdot 2^1 = 2\,a + 2\,b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2\,a + 2\,b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a trouvé $u_n = 1 \cdot 2^n - \frac{1}{2}\,n\,2^n = 2^n - n\,2^{n-1} = (2-n)\,2^{n-1}$.

5.12 Avec le moins de calculs possibles, résoudre la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 6\,u_n - 9\,u_{n-1} \ , \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

La résolution d'une relation de récurrence du deuxième ordre non homogène à coefficients constants est similaire à celle du premier ordre et passe également par la recherche d'une solution particulière. Si $u_{n+1} = a\,u_n + b\,u_{n-1} + f(n)$, alors la solution particulière $u_n^{(p)}$ s'apparente à la fonction $f(n)$:

1) Dans le cas où $f(n)$ est un polynôme de degré k :
   (a) si 1 n'est pas un zéro de l'équation caractéristique :
   $u_n^{(p)} = a_k\,n^k + \ldots + a_2\,n^2 + a_1\,n + a_0$;
   (b) si 1 est un zéro simple de l'équation caractéristique :
   $u_n^{(p)} = n\,(a_k\,n^k + \ldots + a_2\,n^2 + a_1\,n + a_0)$; (**résonance**)
   (c) si 1 est un zéro double de l'équation caractéristique :
   $u_n^{(p)} = n^2\,(a_k\,n^k + \ldots + a_2\,n^2 + a_1\,n + a_0)$. (**double résonance**)
2) Dans le cas où $f(n) = c\,t^n$ où c et t sont des constantes :
   (a) si t n'est pas un zéro de l'équation caractéristique :
   $u_n^{(p)} = a\,t^n$;
   (b) si t est un zéro simple de l'équation caractéristique :
   $u_n^{(p)} = a\,n\,t^n$; (**résonance**)
   (c) si t est un zéro double de l'équation caractéristique :
   $u_n^{(p)} = a\,n^2\,t^n$. (**double résonance**)

Exemple Déterminer la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = -1 \\ u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 4\,u_n + 6\,n - 5 \end{cases}$.

Commençons par résoudre l'équation homogène $u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 4\,u_n$.

Démarrons par la résolution de son équation caractéristique :

$\lambda^2 = 5\,\lambda - 4$

$\lambda^2 - 5\,\lambda + 4 = (\lambda - 4)\,(\lambda - 1) = 0$

On obtient $u_n^{(h)} = a\,4^n + b\,1^n = a\,4^n + b$.

Passons à la recherche de la solution particulière.

Puisque $f(n) = 6\,n - 5$ est un polynôme de degré 1 et que 1 est un zéro simple de l'équation caractéristique, la solution particulière est de la forme $u_n^{(p)} = n\,(a\,n + b)$. La relation de récurrence implique :

$$u_{n+2}^{(p)} = 5\,u_{n+1}^{(p)} - 4\,u_n^{(p)} + 6\,n - 5$$
$$(n+2)\Big(a\,(n+2) + b\Big) = 5\,(n+1)\Big(a\,(n+1) + b\Big) - 4\,n\,(a\,n + b) + 6\,n - 5$$
$$a\,n^2 + 4\,a\,n + 4\,a + b\,n + 2\,b = 5\,a\,n^2 + 10\,a\,n + 5\,a + 5\,b\,n + 5\,b - 4\,a\,n^2 - 4\,b\,n + 6\,n - 5$$
$$\underbrace{(-6\,a - 6)}_{0}\,n\,\underbrace{-\,a - 3\,b + 5}_{0} = 0$$

Le système $\begin{cases} -6\,a - 6 = 0 \\ -a - 3\,b + 5 = 0 \end{cases}$ donne $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$, d'où $u_n^{(p)} = n\,(-n + 2)$.

La solution générale s'écrit donc $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)} = a\,4^n + b + n\,(-n + 2)$.

Il reste à déterminer les coefficients a et b avec les conditions initiales :

$\begin{cases} 0 = u_0 = a \cdot 4^0 + b + 0\,\cdot(-0 + 2) = a + b \\ -1 = u_1 = a \cdot 4^1 + b + 1 \cdot (-1 + 2) = 4\,a + b + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4\,a + b = -2 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 4\,\mathrm{L}_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} a + b = 0 \\ -\,3\,b = -2 \end{cases} \overset{\mathrm{L}_1 \to 3\,\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} 3\,a = -2 \\ -\,3\,b = -2 \end{cases}$

On conclut que $u_n = -\frac{2}{3} \cdot 4^n + \frac{2}{3} + n\,(-n + 2)$.

5.13 Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -4\,u_{n+1} - 4\,u_n \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 4 \\ u_{n+2} = 4\,u_n \end{cases}$

3) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} + a_n = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_0 = \mathrm{A} \\ y_1 = \mathrm{B} \\ y_{n+2} = y_n + 2^n \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = 2\,x_{n+1} - x_n + 1 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_{n+2} = 2\,a_{n+1} - a_n + n \end{cases}$

5.14 La suite des **nombres de Fibonacci** $(\mathrm{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1 = 1 \\ \mathrm{F}_2 = 1 \\ \mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n-1}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

1) Trouver une formule explicite pour F_n.

2) Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ qui est le **nombre d'or**.

Indication : posons $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Après avoir remarqué que $|\varphi| < 1$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a\,\Phi^{n+1} + b\,\varphi^{n+1}}{a\,\Phi^n + b\,\varphi^n}$.

5.15 Dans une suite binaire, chaque chiffre est 0 ou 1. Soit a_n le nombre des suites binaires de longueur n qui n'ont pas deux 0 consécutifs. Par exemple, 101101 est une suite binaire de longueur 6 qui n'a pas deux 0 consécutifs.

1) Trouver a_2 et a_3.
2) Établir que a_n vérifie la relation de récurrence $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$.
3) Résoudre cette relation de récurrence (utiliser l'exercice 5.14).
4) Calculer a_{10} de deux façons différentes.

5.16 De combien de manières peut-on recouvrir un rectangle de taille $1 \times n$ avec des pièces qui sont des carrés 1×1 rouges et des dominos 1×2, bleus ou jaunes ?

5.17 Un point se déplace sur l'axe des x. Ses deux positions initiales ont pour abscisses $x_0 = 10$ et $x_1 = 1$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'abscisse x_n de sa n^{e} position est celle du milieu des deux positions précédentes, d'abscisses x_{n-1} et x_{n-2}.

1) Écrire une relation de récurrence pour x_n.
2) Résoudre cette relation de récurrence, et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
3) Quelle est la distance parcourue par ce point ?

Réponses

5.1 1) $u_n = 2 \cdot 3^n$ 2) $u_5 = 486$

5.2 $u_n = 3 \cdot 5^n$

5.3 $u_n = u_0\, r^n$

5.4 1) $x_n = \frac{1}{2^n} + 2$ 2) $y_n = \frac{19}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}\, n - \frac{11}{4}$

3) $a_n = \frac{n\,(n-1)}{2}$ 4) $a_n = (n+2)^2$

5) $u_n = 3^n$ 6) $u_n = (5\,n + 3)\, 2^n$

5.5 1) (a) $\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = s_{n-1} + n \ , \ n \geqslant 2 \end{cases}$ (b) $s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

2) (a) $\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_n = s_{n-1} + n^2 \ , \ n \geqslant 2 \end{cases}$ (b) $s_n = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$

5.6 1) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2\,u_n + 1 \ , \ n \geqslant 1 \end{cases}$ 2) $u_n = 2^n - 1$

5.7 1) $u_1 = 9 \quad u_2 = 82$ 2) $\begin{cases} u_1 = 9 \\ u_n = 8\,u_{n-1} + 10^{n-1} \ , \ n \geqslant 2 \end{cases}$

3) $u_n = \frac{1}{2}\,(8^n + 10^n)$ 4) $u_5 = 66\ 384$

5.8 1) $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ $\mathrm{R}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 4^{n+1} - \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} & -4^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1} \\ \frac{1}{2} \cdot 4^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n & -4^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$

5.9 $u_n = 7 \cdot (-2)^n - 6 \cdot (-3)^n$

5.12 $u_n = (6 - n)\,3^{n-1}$

5.13 1) $u_n = n\,(-2)^{n-1}$ 2) $u_n = 2^n - (-2)^n$

3) $a_n = \cos(\frac{n\,\pi}{2}) + 2\,\sin(\frac{n\,\pi}{2})$

4) $y_n = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A} + \frac{1}{2}\,\mathrm{B} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{A} - \frac{1}{2}\,\mathrm{B} + \frac{1}{6}\right)(-1)^n + \frac{1}{3}\,2^n = \begin{cases} \mathrm{A} + \frac{2^n - 1}{3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathrm{B} + \frac{2^n - 2}{3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

5) $x_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ 6) $a_n = \frac{n^3 - 3\,n^2 - 4\,n + 6}{6}$

5.14 1) $\mathrm{F}_n = \dfrac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$

5.15 1) $a_2 = 3 \qquad a_3 = 5$

3) $a_n = \frac{5 + 3\,\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 - 3\,\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$

4) $a_{10} = 144$

5.16 $\frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$

5.17 1) $\begin{cases} x_0 = 10 \\ x_1 = 1 \\ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \end{cases}$ 2) $x_n = 4 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 4$

3) 18