

5.11

$$1) (a) \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_n - 4u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$(b) 0 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -4 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-\lambda) - 1 \cdot (-4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Il n'y a donc qu'une seule valeur propre $\lambda = 2$.

Déterminons l'espace propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-2 & -4 & 0 \\ 1 & 0-2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On a obtenu $E_2 = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

Comme l'unique espace propre E_2 est de dimension 1, la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

2) (a) Commençons par calculer l'inverse de la matrice de passage :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Procédons maintenant à la vérification de calcul demandée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) **Initialisation**

$$\text{Si } n = 1, \text{ on a bien } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 1\lambda^{1-1} \\ 0 & \lambda^1 \end{pmatrix}.$$

Hérédité

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (n+1)2^n \\ 2^n & n2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)2^n & -n2^{n+1} \\ n2^{n-1} & -(n-1)2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (n+1)2^n - n2^{n+1} \\ n2^{n-1} - (n-1)2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n-1)2^n \\ -(n-2)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

On conclut que $u_n = -(n-2)2^{n-1} = (2-n)2^{n-1}$.