5.12 La relation de récurrence $u_{n+1} = 6\,u_n - 9\,u_{n-1}$ donne l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 = 6\,\lambda - 9$$
$$\lambda^2 - 6\,\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

Attendu qu'il n'y a qu'une seule solution $\lambda = 3$, la solution générale est de la forme $u_n = a\,3^n + b\,n\,3^n$.

On détermine les coefficients a et b grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} 2 = u_0 = a \cdot 3^0 + b \cdot 0 \cdot 3^0 = a \\ 5 = u_1 = a \cdot 3^1 + b \cdot 1 \cdot 3^1 = 3\,a + 3\,b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \phantom{{}+3\,b} = 2 \\ 3\,a + 3\,b = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

On a trouvé $u_n = 2 \cdot 3^n - \frac{1}{3}\,n\,3^n = 2 \cdot 3^n - n\,3^{n-1} = (6 - n)\,3^{n-1}$.